OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 5.



# ALLGEMEINE FLÄCHENTHEORIE

(DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS)

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS.
(1827)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO
ECCLESIAE

Allgemeine

# FLÄCHENTHEORIE

(Disquisitiones generales circa superficies curvas)

von

CARL FRIEDRICH GAUSS

(1827).

Deutsch herausgegeben

von

**A. Wangerin.**

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1889.

# Allgemeine Flächentheorie

(Disquisitiones generales circa superficies curvas)

von

## Carl Friedrich Gauss.

Aus »Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores Vol. VI ad a. 1823—1827.« Göttingen 1828.

---

1.

[**99**] Untersuchungen, bei denen eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume ins Spiel kommt, lassen sich häufig übersichtlicher und einfacher darstellen, wenn man eine Kugelfläche zu Hülfe nimmt, die mit einem Radius $= 1$ um einen willkürlich angenommenen Mittelpunkt beschrieben ist; die verschiedenen Richtungen werden dann durch diejenigen Punkte auf der Oberfläche dieser Hülfskugel dargestellt, welche die Endpunkte der mit ihnen parallel gezogenen Radien sind. Wird die Lage eines Punktes im Raum durch drei Coordinaten bestimmt, d. i. durch seine Abstände von drei festen, auf einander senkrechten Ebenen, so sind vor allem die Richtungen der zu jenen Ebenen senkrechten Axen ins Auge zu fassen; die Punkte der Kugelfläche, welche diese Axenrichtungen darstellen, sollen mit 1, 2, 3 bezeichnet werden; ihr gegenseitiger Abstand beträgt 90 Grad. Uebrigens sind dabei unter den Axenrichtungen diejenigen Richtungen zu verstehen, nach denen hin die entsprechenden Coordinaten wachsen.

2.

[**100**] Es wird zweckmässig sein, einige Sätze, die bei der folgenden Untersuchung häufige Anwendung finden, hier im Zusammenhang vorzuführen.

I. Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden wird gemessen dnrch den Bogen zwischen denjenigen Pnnkten, welche anf der Kngelfläche den Richtungen jener Geraden entsprechen.

II. Die Stellnng einer beliebigen Ebene kann dnrch einen grössten Kngelkreis dargestellt werden, dessen Ebene jener ersten parallel ist.

III. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den beiden grössten Kugelkreisen, durch welche jene dargestellt werden; der in Rede stehende Winkel wird daher anch durch den zwischen den Polen der beiden grössten Kugelkreise liegenden Bogen gemessen. Gleicherweise wird der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene durch den Bogen gemessen, der von dem der Richtung der Geraden entsprechenden Pnnkte der Kngelfläche ansgeht und auf dem grössten Kreise, der die Stellnng der Ebene darstellt, senkrecht steht.

IV. Bezeichnen $x, y, z$; $x', y', z'$ die Coordinaten zweier Pnnkte, $r$ ihren Abstand; ist ferner $L$ der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung der von dem ersten jener Pnnkte zum zweiten gezogenen Geraden darstellt, so wird

$$x' = x + r\cos 1L,$$
$$y' = y + r\cos 2L,$$
$$z' = z + r\cos 3L.$$

V. Darans folgt nnmittelbar, dass allgemein

$$\cos^2 1L + \cos^2 2L + \cos^2 3L = 1$$

wird, dass ferner, wenn $L'$ irgend einen andern Pnnkt der Kngelfläche bezeichnet,

$$\cos 1L \,.\, \cos 1L' + \cos 2L \,.\, \cos 2L' + \cos 3L \,.\, \cos 3L' = \cos LL'$$

ist.

VI. Lehrsatz. Bezeichnen $L, L', L'', L'''$ vier auf der Kngel liegende Pnnkte nnd bezeichnet $A$ den Winkel, welchen die Bogen $LL'$, $L''L'''$, bis zn ihrem Schnittpunkt verlängert, bilden, so ist

$$\cos LL'' \,.\, \cos L'L''' - \cos LL''' \,.\, \cos L'L''$$
$$= \sin LL' \,.\, \sin L''L''' \,.\, \cos A.$$

[**101**] Beweis. Der Schnittpunkt von $LL'$ und $L''L'''$ möge ebenfalls mit $A$ bezeichnet werden; ferner sei

$$AL = t,\ AL' = t',\ AL'' = t'',\ AL''' = t'''.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t \ \cos t'' \ + \sin t \ \sin t'' \ \cos A,\\
\cos L'L''' &= \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A,\\
\cos LL''' &= \cos t \ \cos t''' + \sin t \ \sin t''' \cos A,\\
\cos L'L'' &= \cos t' \cos t'' \ + \sin t' \sin t'' \ \cos A;
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\cos LL'' \, . \cos L'L''' - \cos LL''' \, . \cos L'L''\\
&= \cos A \,[\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t''\\
&\quad - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''']\\
&= \cos A (\cos t \sin t' - \sin t \cos t')(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''')\\
&= \cos A \, . \sin (t' - t) \, . \sin (t''' - t'')\\
&= \cos A \, . \sin LL' . \ \sin L''L''' .
\end{aligned}$$

Hierbei ist noch Folgendes zu beachten. Vom Punkte $A$ gehen je zwei Zweige der beiden grössten Kreise aus, und dieselben bilden dort zwei Winkel, die sich zu $180^\circ$ ergänzen; von diesen Zweigen sind, wie aus unserer Ableitung hervorgeht, diejenigen zu nehmen, deren Richtungen mit der Richtung des Fortschreitens vom Punkte $L$ nach $L'$ und vom Punkte $L''$ nach $L'''$ übereinstimmen. Daraus erkennt man zugleich, dass es gleichgültig ist, welchen der beiden Schnittpunkte der grössten Kreise man ausgewählt hat. An Stelle des Winkels $A$ kann auch der Bogen zwischen den Polen der grössten Kreise, von denen $LL'$ und $L''L'''$ Theile bilden, gesetzt werden: offenbar aber muss man diejenigen Pole nehmen, die in Bezug auf diese Bogen gleiche Lage haben, nämlich beide Pole zur Rechten, wenn man von $L$ nach $L'$ und von $L''$ nach $L'''$ hin fortschreitet, oder beide zur Linken.

VII. Es seien $L$, $L'$, $L''$ drei Punkte der Kugelfläche, und es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\begin{aligned}
\cos 1L &= x, & \cos 2L &= y, & \cos 3L &= z,\\
\cos 1L' &= x', & \cos 2L' &= y', & \cos 3L' &= z',\\
\cos 1L'' &= x'', & \cos 2L'' &= y'', & \cos 3L'' &= z'',
\end{aligned}$$

[102] ferner

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \triangle .$$

$\lambda$ möge den Pol des grössten Kreises bezeichnen, von dem der Bogen $LL'$ ein Theil ist, und zwar denjenigen Pol, der in Bezug auf diesen Bogen ebenso liegt, wie der Punkt 1 in Bezug auf den Bogen 23. Dann ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze

$$yz' - y'z = \cos 1\lambda \,.\, \sin 23 \,.\, \sin LL'$$

oder, da $23 = 90^{\circ}$,

$$\begin{aligned} yz' - y'z &= \cos 1\lambda \,.\, \sin LL', \text{ und ebenso} \\ zx' - z'x &= \cos 2\lambda \,.\, \sin LL', \\ xy' - x'y &= \cos 3\lambda \,.\, \sin LL'. \end{aligned}$$

Mnltiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $x''$, $y''$, $z''$ nnd addirt sie dann, so erhält man mit Hülfe des zweiten in V angeführten Satzes

$$\triangle = \cos\lambda L'' \,.\, \sin LL'.$$

Nnn sind drei Fälle zn nnterscheiden. Erstens kann $L''$ auf demselben grössten Kreise liegen, von dem der Bogen $LL'$ einen Theil bildet; dann ist $\lambda L'' = 90^{\circ}$ nnd daher $\triangle = 0$. Liegt dagegen $L''$ ansserhalb jenes grössten Kreises, so tritt der zweite Fall ein, wenn $L''$ nnd $\lambda$ auf derselben Seite, der dritte, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten des Kreises liegen: in beiden Fällen bilden die Punkte $L$, $L'$, $L''$ ein sphärisches Dreieck, nnd zwar folgen diese Punkte im zweiten Falle in derselben Reihenfolge auf einander wie die Pnnkte 1, 2, 3, während im dritten Falle die Reihenfolge die entgegengesetzte ist. Bezeichnet man die Winkel jenes sphärischen Dreiecks einfach mit $L$, $L'$, $L''$ und mit $p$ die vom Punkte $L''$ auf die Seite $LL'$ gefällte sphärische Höhe, so wird

$$\sin p = \sin L \,.\, \sin LL'' = \sin L' \,.\, \sin L'L'',$$

ferner ist

$$\lambda L'' = 90^{\circ} \mp p,$$

wobei das obere Zeichen für den zweiten, das untere für den dritten Fall gilt. Hierans folgt, dass

$$\begin{aligned} \pm \triangle &= \sin L \,.\, \sin LL' \,.\, \sin LL'' \\ &= \sin L' \,.\, \sin LL' \,.\, \sin L'L'' \\ &= \sin L'' \,.\, \sin LL'' \,.\, \sin L'L'' \end{aligned}$$

ist. Uebrigens kann man den ersten Fall als sowohl im zweiten wie im dritten enthalten ansehen; nnd ebenso erkennt man leicht, dass $\pm \triangle$ das sechsfache Volumen der Pyramide darstellt, deren Ecken die Pnnkte $L$, $L'$, $L''$ nnd der Kugelmittelpnnkt sind. Endlich schliesst man hierans nnmittelbar, dass derselbe Ausdrnck $\pm \frac{1}{6} \triangle$ allgemein das Volumen einer beliebigen [**103**] Pyramide darstellt, deren Ecken im Coordinatenanfangspunkte und in den Punkten mit den Coordinaten $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$; $x''$, $y''$, $z''$ liegen.

3.

Von einer krummen Fläche sagt man, dass sie in einem auf ihr gelegenen Punkte $A$ eine stetige Krümmung besitzt, wenn die Richtungen der Geraden, die von $A$ nach den verschiedenen dem Punkte $A$ unendlich nahen Punkten der Fläche gezogen werden können, sämmtlich von ein und derselben durch $A$ gehenden Ebene unendlich wenig abweichen. Diese Ebene berührt, wie man zu sagen pflegt, die krumme Fläche in $A$. Sobald dieser Bedingung in einem Punkte nicht genügt werden kann, wird hier die Stetigkeit der Krümmung unterbrochen, wie es z. B. an der Spitze eines Kegels stattfindet. Die folgenden Untersuchungen sollen auf solche krummen Flächen oder auf solche Theile von Flächen beschränkt werden, bei denen die Stetigkeit der Krümmung nirgends unterbrochen wird. Wir bemerken nur noch, dass die Methoden, welche zur Bestimmung der Lage der Berührungsebene dienen, für singuläre Punkte, in denen die Stetigkeit der Krümmung unterbrochen wird, ihre Bedeutung verlieren und auf Unbestimmtes führen müssen.

4.

Die Lage der Berührungsebene wird am bequemsten durch die Lage des auf ihr im Punkte $A$ errichteten Lothes bestimmt; man nennt dasselbe eine Normale der krummen Fläche. Die Richtung dieser Normale soll durch den Punkt $L$ auf der Oberfläche der Hülfskugel dargestellt und

$$\cos 1L = X,\ \cos 2L = Y,\ \cos 3L = Z$$

gesetzt werden, während mit $x, y, z$ die Coordinaten des Punktes $A$ bezeichnet werden sollen. Es seien ferner $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten eines andern Punktes $A'$ der krummen Fläche, $ds$ der unendlich kleine Abstand desselben von $A$; endlich sei $\lambda$ der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung des Bogenelements $AA'$ darstellt. Dann wird

$$dx = ds.\cos 1\lambda,\ dy = ds.\cos 2\lambda,\ dz = ds.\cos 3\lambda,$$

und da $\lambda L = 90^\circ$ sein soll,

$$X \cos 1\lambda + Y \cos 2\lambda + Z \cos 3\lambda = 0.$$

[**104**] Aus dieser Gleichung in Verbindung mit den vorhergehenden ergiebt sich

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Nun giebt es zwei allgemeine Methoden, eine krumme Fläche analytisch darzustellen. Die erste Methode benutzt eine Gleichung zwischen den Coordinaten $x$, $y$, $z$; diese Gleichung soll, wie wir annehmen wollen, auf die Form $W = 0$ gebracht sein, wo $W$ eine Function der Veränderlichen $x$, $y$, $z$ ist. Es sei das vollständige Differential der Function $W$

$$dW = Pdx + Qdy + Rdz,$$

so wird auf der krummen Fläche

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

und daher auch

$$P\cos 1\lambda + Q\cos 2\lambda + R\cos 3\lambda = 0.$$

Da diese Gleichung, eben so wie die oben aufgestellte, für die Richtungen aller auf der Fläche liegenden Bogenelemente $ds$ gelten soll, so übersieht man leicht, dass $X$, $Y$, $Z$ den Grössen $P$, $Q$, $R$ proportional sein müssen; und in Folge dessen wird, da noch

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

ist, entweder

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$
$$Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

oder

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$
$$Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

Die zweite Methode stellt die Coordinaten als Functionen von zwei neuen Veränderlichen $p$, $q$ dar. Durch Differentiation dieser Functionen mögen die Gleichungen entstehen

$$dx = a\,dp + a'dq,$$
$$dy = b\,dp + b'dq,$$
$$dz = c\,dp + c'dq;$$

[**105**] dann erhält man durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die oben aufgestellte Formel:

$$(aX + bY + cZ)\,dp + (a'X + b'Y + c'Z)\,dq = 0.$$

Da nun diese Gleichung stattfinden soll unabhängig von dem Werth der Differentiale $dp$, $dq$, so muss offenbar

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0$$

sein: daraus schliesst man, dass $X$, $Z$, $Y$ den Grössen

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'$$

proportional sein müssen.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \triangle,$$

so wird entweder

$$X = \frac{bc' - cb'}{\triangle}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\triangle}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\triangle}$$

oder

$$X = \frac{cb' - bc'}{\triangle}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\triangle}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\triangle}.$$

Zu den beiden eben besprochenen allgemeinen Methoden kommt noch eine dritte, bei welcher eine der Coordinaten, z. B. $z$, als Function der beiden andern $x$, $y$ ausgedrückt wird. Diese Methode ist augenscheinlich nichts anderes, als ein Specialfall der ersten oder zweiten Methode. Setzt man daher hier

$$dz = t\,dx + u\,dy,$$

so wird entweder

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}$$

oder

$$X = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}},$$

$$Z = \frac{-1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}.$$

5.

Die beiden im vorhergehenden Artikel gefundenen Lösungen beziehen sich, wie leicht ersichtlich ist, anf entgegengesetzte Punkte der Kugelfläche oder auf entgegengesetzte Richtungen; [106] nnd natnrgemäss rühren diese davon her, dass die Normale auf einer oder der andern Seite der Fläche errichtet werden kann. Wenn man nun von jetzt an die beiden Seiten der Fläche nnterscheidet und die eine die äussere, die andere die innere nennt, so kann man mit Hülfe des in Artikel 2 (VII) abgeleiteten Satzes für jede der heiden Normalen die zugehörige Lösnng angeben, sohald sich ein Kriterinm znr Unterscheidnng der einen Seite von der andern aufstellen lässt.

Bei der ersten Methode lässt sich ein solches Kriterinm aus dem Vorzeichen des Werthes der Grösse $W$ ableiten. Denn, allgemein zu reden, scheidet die krnmme Fläche die Theile des Raumes, in denen $W$ einen positiven Werth hat, von denen, in denen der Werth von $W$ negativ ist. Aus dem vorher angeführten Satze aber ergiebt sich leicht, dass, wenn $W$ einen positiven Werth anf der äussern Seite annimmt, und wenn die Normale nach aussen gezogen ist, die erste Lösung zu nehmen ist. Uebrigens wird man in jedem Einzelfalle leicht beurtheilen, ob in Bezug anf das Vorzeichen von $W$ dieselhe Regel für die ganze Fläche gilt oder oh für verschiedene Theile verschiedene Regeln Platz greifen; so lange die Coefficienten $P$, $Q$, $R$ endliche Werthe haben und nicht alle drei gleichzeitig verschwinden, schliesst das Gesetz der Stetigkeit einen Wechsel aus.

Benntzt man die zweite Methode, so kann man auf der krummen Fläche zwei Systeme von krummen Linien ins Auge fassen, eins, für welches $p$ veränderlich, $q$ constant ist, während für das andere $q$ veränderlich und $p$ constant ist: die gegenseitige Lage dieser Linien in Bezng auf die änssere Seite mnss entscheiden, welche von beiden Lösungen zu nehmen ist. Sohald nämlich die folgenden drei Linien, 1) der vom Punkt $A$ ausgehende Zweig einer Linie des ersten Systems, für den $p$ wächst, 2) der ebenfalls von $A$ ausgehende, dem zweiten System angehörige Zweig, für den $q$ wächst, 3) die in $A$ nach aussen errichtete Normale, ähnlich liegen, wie am Anfangspunkt die Coordinatenaxen $x$, $y$, $z$ (z. B. wenn sowohl von jenen drei Linien als von diesen die erste nach links, die zweite nach rechts, die dritte nach oben gerichtet ist), so mnss die erste Lösnng genommen werden; sobald aber die gegenseitige Lage der ersten drei Linien der gegenseitigen Lage

der Axen $x$, $y$, $z$ entgegengesetzt ist, wird die zweite Lösung gelten.

[107] Bei der dritten Methode ist zu ermitteln, ob, wenn $z$ einen positiven Zuwachs erhält, während $x$ und $y$ unverändert bleiben, der betrachtete Flächenpunkt nach der äussern oder innern Seite übergeht. Im ersten Falle gilt für die nach aussen gerichtete Normale die erste Lösung, im andern Falle die zweite.

6.

Wie durch Uebertragung der Richtung der Normale einer krummen Fläche auf die Oberfläche der Hülfskugel jedem Punkte der ersten Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten zugeordnet ist, so wird auch jede Linie resp. jede Figur auf der ersteren durch eine entsprechende Linie oder Figur auf der Kugel dargestellt werden. Die Vergleichung zweier derart einander entsprechenden Figuren, deren eine gleichsam ein Bild der andern ist, kann aus einem doppelten Gesichtspunkte stattfinden; man kann nämlich einmal allein die Grösse ins Auge fassen, sodann aber kann man auch von allen Grössenbeziehungen abstrahiren und nur die Lage in Betracht ziehen.

Der erste Gesichtspunkt bildet die Grundlage einiger Begriffe, deren Einführung in die Lehre von den krummen Flächen von grossem Nutzen sein wird. Wir schreiben jedem bestimmt abgegrenzten Theile einer krummen Fläche eine *Totalkrümmung* oder *Gesammtkrümmung* zu, die durch den Flächeninhalt derjenigen Figur auf der Kugelfläche gemessen werden soll, welche jenem Theile entspricht. Von dieser Gesammtkrümmung ist wohl zu unterscheiden die gewissermaassen specifische Krümmung, die wir das *Krümmungsmaass* nennen wollen. Dieses letztere bezieht sich auf einen *Punkt* einer Fläche und soll den Quotienten bezeichnen, der entsteht, wenn die Gesammtkrümmung des an dem Punkte liegenden Oberflächenelements durch den Flächeninhalt des Elements selbst dividirt wird; dasselbe giebt also das Verhältniss unendlich kleiner Flächen an, die einander auf der krummen Fläche und der Hülfskugel entsprechen. Der Nutzen dieser neuen Begriffe wird, wie wir hoffen, aus den folgenden Untersuchungen noch deutlicher hervorgehen. Was die Terminologie betrifft, so haben wir unser Augenmerk vor allem darauf richten zu sollen geglaubt, dass jeder Doppelsinn ausgeschlossen werde; deswegen haben wir es

auch nicht für zweckmässig gehalten, die in der Lehre von den ebenen Curven gewöhnlich benutzten (obwohl nicht allseitig als angemessen angesehenen) Ausdrücke ohne weiteres auf unsern Fall zu übertragen; denn [108] dann hätte das Krümmungsmaass einfach Krümmung, die Gesammtkrümmung aber Amplitude genannt werden müssen. Aber warum sollen wir uns in der Wahl der Worte nicht frei bewegen, wenn dieselben nur nicht inhaltleere Dinge bezeichnen und der Ausdruck zu einer irrigen Auslegung verführt?

Die Lage einer Figur auf der Hülfskugelfläche kann mit der Lage der entsprechenden Figur auf der krummen Fläche entweder übereinstimmend, oder ihr entgegengesetzt (die umgekehrte) sein. Der erste Fall findet statt, wenn zwei auf der krummen Fläche von demselben Punkt nach verschiedenen, jedoch nicht entgegengesetzten Richtungen gezogene Linien auf der Kugelfläche durch ähnlich liegende Linien dargestellt werden, d. h. wenn das Bild der rechts liegenden Linie ebenfalls rechts liegt. Der zweite Fall tritt ein, wenn das Entgegengesetzte gilt. Beide Fälle wollen wir durch das positive oder negative Vorzeichen des Krümmungsmaasses unterscheiden. Diese Unterscheidung kann offenbar nur insofern statthaben, als wir auf beiden Flächen eine bestimmte Seite auswählen, auf der wir die Figur liegend denken. Auf der Hülfskugel wollen wir stets die äussere, vom Mittelpunkt abgewandte Seite nehmen: auf der krummen Fläche kann ebenfalls die äussere Seite, oder die, die als äussere angesehen wird, gewählt werden, oder besser dieselbe Seite, auf der die Normale errichtet wird; augenscheinlich wird nämlich hinsichtlich der Uebereinstimmung der Lage der Figuren nichts geändert, wenn man auf der Fläche sowohl die Figur, als die Normale auf der entgegengesetzten Seite gezogen denkt, falls nur ihr Bild immer auf derselben Seite der Kugelfläche beschrieben wird.

Das positive oder negative Vorzeichen, das wir je nach der Lage einer unendlich kleinen Figur dem Krümmungsmaass zuschreiben, können wir auch auf die gesammte Krümmung einer endlichen Figur auf der Fläche ausdehnen. Wollen wir jedoch den Gegenstand in seiner vollen Allgemeinheit abhandeln, so sind noch einige Erörterungen nöthig, die hier nur kurz berührt werden sollen. Wenn die Figur auf der krummen Fläche so beschaffen ist, dass den einzelnen in ihr liegenden Punkten verschiedene Punkte auf der Kugelfläche entsprechen, so bedarf die Definition keiner weiteren Erläuterung. Falls aber eine der-

artige Bedingung nicht stattfindet, wird es nöthig sein, gewisse Theile der auf der Kugelfläche gelegenen Figur [109] zweimal oder mehrmals in Rechnung zu ziehen. Dadurch kann, je nachdem die Lage übereinstimmend oder entgegengesetzt ist, eine Vergrösserung oder ein gegenseitiges Aufheben entstehen. Am einfachsten verfährt man in einem solchen Falle folgendermaassen: man denke die Figur auf der krummen Fläche in solche Theile getheilt, die, jeder für sich betrachtet, der obigen Bedingung genügen, man bestimme sodann für die einzelnen Theile die Gesammtkrümmung vermittelst der Grösse der Fläche der entsprechenden Figur auf der Kugel, wobei für das Vorzeichen die Lage maassgebend ist, und man nehme endlich als Gesammtkrümmung der ganzen Figur denjenigen Werth an, welcher durch Addition der den einzelnen Theilen entsprechenden Gesammtkrümmungen entsteht. Allgemein ist daher die Gesammtkrümmung einer Figur

$$\int k\,d\sigma,$$

falls $d\sigma$ das Flächenelement, $k$ das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte bezeichnet. Was die geometrische Darstellung dieses Integrals betrifft, so kommt es dabei hauptsächlich auf das Folgende an. Dem Umfang einer Figur auf der krummen Fläche wird (unter der in Art. 3 angegebenen Einschränkung) auf der Kugelfläche stets eine in sich zurückkehrende Linie entsprechen. Wenn dieselbe sich selbst nirgends durchschneidet, so wird durch sie die ganze Kugelfläche in zwei Theile getheilt, deren einer der Figur auf der krummen Fläche entspricht; der Flächeninhalt dieses Theiles, positiv oder negativ genommen, je nachdem derselbe hinsichtlich seines Umfangs dieselbe Lage hat wie die Figur auf der krummen Fläche oder die entgegengesetzte, wird dann die Gesammtkrümmung der zuletzt genannten Figur ausdrücken. Sobald aber jene Linie sich selbst einmal oder mehrmals schneidet, ist die Gestalt der Figur zwar eine complicirte, jedoch kann man ihr noch einen bestimmten Flächeninhalt mit demselben Rechte zuschreiben, wie einer Figur ohne Knoten; und dieser Flächeninhalt, richtig verstanden, liefert stets den rechten Werth der Gesammtkrümmung. Indessen müssen wir die weitere Erörterung dieses Gegenstandes, der die allgemeinste Auffassung von Figuren betrifft, uns für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

7.

Wir wollen nun eine Formel für das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte einer krummen Fläche ableiten. Bezeichnet $d\sigma$ den Flächeninhalt des betrachteten Oberflächenelements, so ist $Zd\sigma$ der Flächeninhalt der Projection dieses Elements auf die $xy$-Ebene; und ebenso ist, wenn $d\Sigma$ der Flächeninhalt des entsprechenden Elements [110] der Kugelfläche ist, $Zd\Sigma$ der Flächeninhalt seiner Projection auf dieselbe Ebene: das positive oder negative Vorzeichen von $Z$ aber zeigt an, ob die Lage der Projection mit der des projicirten Elements übereinstimmt oder die entgegengesetzte ist; offenbar haben daher jene Projectionen dasselbe Grössenverhältniss und zugleich dieselbe gegenseitige Lage wie die Elemente selbst. Wir wollen jetzt ein Element der Oberfläche betrachten, das die Gestalt eines Dreiecks hat, und annehmen, dass die Projectionen der drei Eckpunkte die Coordinaten haben

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x + dx, & y + dy, \\ x + \delta x, & y + \delta y. \end{array}$$

Der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks ist

$$dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x,$$

und zwar ergiebt dieser Ausdruck den doppelten Inhalt mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die Seite, die vom ersten zum dritten Punkte führt, in Bezug auf die Seite, die den ersten mit dem zweiten verbindet, ebenso liegt, wie die Coordinatenaxe $y$ zur Coordinatenaxe $x$ oder entgegengesetzt.

Sind ferner die Coordinaten der drei Punkte, welche die Ecken der Projection des entsprechenden Elements der Kugelfläche sind, auf das Centrum der Kugel als Anfangspunkt bezogen,

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X + dX, & Y + dY, \\ X + \delta X, & Y + \delta Y, \end{array}$$

so wird der doppelte Flächeninhalt dieser Projection

$$dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X,$$

und von dem Vorzeichen dieses Ausdrucks gilt dasselbe wie oben. Daher ist das Krümmungsmaass an der betrachteten Stelle der krummen Fläche

$$k = \frac{dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X}{dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x}.$$

Nehmen wir nunmehr an, die Fläche sei in der [111] dritten der in Art. 4 betrachteten Formen gegeben, so sind $X$ und $Y$ Functionen von $x$, $y$, und es ist daher

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot dy,$$

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \delta y,$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot dy,$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot \delta y.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht der obige Ausdruck in folgenden über:

$$k = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Setzen wir, wie oben,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

ausserdem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = T, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = U, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V$$

oder

$$dt = Tdx + Udy,$$
$$du = Udx + Vdy,$$

so geben die obigen Formeln

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1 + t^2 + u^2) Z^2 = 1,$$

und daher

$$dX = -Zdt - tdZ,$$
$$dY = -Zdu - udZ,$$
$$(1 + t^2 + u^2) dZ + Z(t\,dt + u\,du) = 0;$$

oder

$$dZ = -Z^3(t\,dt + u\,du),$$
$$dX = -Z^3(1 + u^2)dt + Z^3 tu\,du,$$
$$dY = +Z^3 tu\,dt - Z^3(1 + t^2)du,$$

[112] und schliesslich

$$\frac{\partial X}{\partial x} = Z^3\left[-(1+u^2)T + tuU\right],$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} = Z^3\left[-(1+u^2)U + tuV\right],$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Z^3\left[tuT - (1+t^2)U\right],$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = Z^3\left[tuU - (1+t^2)V\right].$$

Substituirt man diese Werthe, so geht aus dem vorher aufgestellten Ausdrucke von $k$ der folgende hervor:

$$k = Z^6(TV - U^2)(1 + t^2 + u^2) = Z^4(TV - U^2)$$
$$= \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2}.$$

8.

Durch geeignete Wahl des Aufangspunktes und der Coordinatenaxen kann man es leicht bewerkstelligen, dass für einen bestimmten Punkt $A$ die Werthe der Grössen $t$, $u$, $U$ verschwinden. Die beideu ersten Bedingungeu werden ja schon erfüllt, wenn die Berührungsebene des Punktes zur Coordinatenebene $xy$ genommen wird. Legt man ausserdem den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt $A$, so nimmt der Ausdruck für die Coordinate $z$ offenbar die Form an:

$$z = \tfrac{1}{2}T_0x^2 + U_0xy + \tfrac{1}{2}V_0y^2 + \Omega_0,$$

wo $\Omega_0$ von höherer als der zweiten Ordnung ist. Dreht man dann die Axen $x$, $y$ um einen solchen Winkel $M$, dass

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U_0}{T_0 - V_0}$$

ist, so sieht man leicht, dass eine Gleichung von folgender Form herauskommt:

$$z = \tfrac{1}{2}Tx^2 + \tfrac{1}{2}Vy^2 + \Omega,$$

und dadurch ist auch der dritten Bedingung genügt. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

[**113**] I. Wenn die krumme Fläche durch eine zu ihr senkrechte Ebene geschnitten wird, welche durch die $x$-Axe geht, so entsteht eine ebene Curve, deren Krümmungsradius im Punkte

$A$ gleich $\frac{1}{T}$ wird; dabei zeigt das positive oder negative Zeichen die Concavität oder Convexität gegen die Seite hin an, nach der die $z$-Coordinaten positiv sind.

II. Ebenso wird $\frac{1}{V}$ der Krümmnngsradius im Punkt $A$ für diejenige ebene Cnrve, die durch den Schnitt der krummen Fläche mit der durch die Axen $y$ und $z$ gelegten Ebene entsteht.

III. Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so wird

$$z = \tfrac{1}{2}(T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi)r^2 + \Omega.$$

Daraus schliesst man, dass, wenn die Fläche von einer durch $A$ gehenden, auf ihr senkrechten Ebene geschnitten wird, die mit der Axe $x$ den Winkel $\varphi$ bildet, eine ebene Curve entsteht, deren Krümmungsradins im Punkte $A$

$$= \frac{1}{T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi}$$

ist.

IV. Wenn daher $T = V$ ist, so werden die Krümmungsradien in allen ebenen Normalschnitten gleich. Sind aber $T$ und $V$ nngleich, so ist daraus, dass $T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi$ für jeden Werth des Winkels $\varphi$ zwischen $T$ und $V$ liegt, leicht zu ersehen, dass die Krümmungsradien in den in I. und II. betrachteten Hauptschnitten die extremen Werthe der Krümmung ergeben, dass nämlich der eine die grösste, der andere die kleinste Krümmung giebt, wenn $T$ und $V$ mit demselben Zeichen behaftet sind, dagegen der eine die grösste Convexität, der andere die grösste Concavität, wenn $T$ und $V$ verschiedene Vorzeichen besitzen. Diese Schlüsse enthalten fast Alles, was *Euler* zuerst über die Krümmung von Oberflächen gelehrt hat.

V. Für das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte $A$ aber erhält man den sehr einfachen Ausdruck $k = TV$; wir haben daher folgenden wichtigen

Lehrsatz. Das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte einer Fläche ist gleich einem Bruche, dessen Zähler = 1, und dessen Nenner [**114**] das Product der beiden extremen Krümmungsradien in den durch Normalebenen gebildeten Schnitten ist.

Zugleich erhellt, dass das Krümmungsmaass positiv wird für concav-concave oder convex-convexe Flächen (zwischen beiden

besteht kein wesentlicher Unterschied), dagegen negativ für concav-convexe. Besteht eine Fläche aus Theilen von beiden Arten, so muss an der Grenze beider das Krümmungsmaass verschwinden. Die Eigenschaften solcher Flächen, in denen das Krümmungsmaass überall verschwindet, werden weiter unten entwickelt werden.

9.

Die am Schluss des Art. 7 für das Krümmungsmaass aufgestellte allgemeine Formel ist von allen die einfachste, da sie nur fünf Elemente enthält; auf eine etwas complicirtere, die aus neun Elementen gebildet ist, werden wir geführt, wenn wir die erste Art, eine krumme Fläche auszudrücken, anwenden wollen. Wir behalten die Bezeichnungen des Art. 4 bei und setzen ausserdem

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = R',$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} = P'', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} = Q'', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = R'',$$

so dass

$$\begin{aligned} dP &= P'dx + R''dy + Q''dz, \\ dQ &= R''dx + Q'dy + P''dz, \\ dR &= Q''dx + P''dy + R'dz \end{aligned}$$

wird. Da nun $t = -\frac{P}{R}$ ist, so finden wir durch Differentiation

$$R^2dt = -RdP + PdR$$
$$= (PQ'' - RP')dx + (PP'' - RR'')dy + (PR' - RQ'')dz$$

oder, falls $dz$ mit Hülfe der Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

eliminirt wird,

[115] $$\begin{aligned} R^3dt = (&- R^2P' + 2PRQ'' - P^2R')dx \\ &+ (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dy. \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} R^3du = (&PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dx \\ &+ (- R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R')dy. \end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir, dass

$$R^3T = -R^2P' + 2PRQ'' - P^2R',$$
$$R^3U = PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'',$$
$$R^3V = -R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R'$$

ist. Substituiren wir diese Werthe in Art. 7, so erhalten wir für das Krümmungsmaass $k$ den folgenden symmetrischen Ausdruck:

$$\begin{aligned}&(P^2 + Q^2 + R^2)^2 . k \\ = &P^2(Q'R' - P''^2) + Q^2(P'R' - Q''^2) + R^2(P'Q' - R''^2) \\ &+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') \\ &+ 2PQ(P''Q'' - R'R'').\end{aligned}$$

## 10.

Eine noch complicirtere Formel, nämlich eine aus fünfzehn Elementen zusammengesetzte, erhalten wir, wenn wir die zweite allgemeine Methode der Darstellung einer Fläche benutzen. Es ist jedoch von grosser Wichtigkeit, auch diese Formel zu entwickeln. Wir wollen wieder die Bezeichnung des Art. 4 festhalten und ausserdem setzen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial p\, \partial q} = \alpha', \quad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = \alpha'',$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} = \beta, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p\, \partial q} = \beta', \quad \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = \beta'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = \gamma, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p\, \partial q} = \gamma', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = \gamma''.$$

Sodann wollen wir folgende Abkürzungen einführen

$$bc' - cb' = A,$$
$$ca' - ac' = B,$$
$$ab' - ba' = C.$$

**116**] Zuerst beachten wir, dass

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

oder

$$dz = -\frac{A}{C}\,dx - \frac{B}{C}\,dy$$

ist; insofern daher $z$ als Function von $x$ und $y$ angesehen wird, wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t = -\frac{A}{C},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = u = -\frac{B}{C}.$$

Ferner schliessen wir aus den Formeln

$$dx = adp + a'dq, \quad dy = bdp + b'dq,$$

dass

$$Cdp = b'dx - a'dy,$$
$$Cdq = -bdx + ady$$

ist. Daraus erhalten wir für die vollständigen Differentiale von $t$ und $u$

$$C^3dt = \left(A\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{\partial A}{\partial p}\right)(b'dx - a'dy)$$
$$+ \left(C\frac{\partial A}{\partial q} - A\frac{\partial C}{\partial q}\right)(bdx - ady),$$
$$C^3du = \left(B\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{B\partial}{\partial p}\right)(b'dx - a'dy)$$
$$+ \left(C\frac{\partial B}{\partial q} - B\frac{\partial C}{\partial q}\right)(bdx - ady).$$

Setzen wir in diesen Formeln

$$\frac{\partial A}{\partial p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma,$$
$$\frac{\partial A}{\partial q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma',$$
$$\frac{\partial B}{\partial p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha,$$
$$\frac{\partial B}{\partial q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha',$$

[117]

$$\frac{\partial C}{\partial p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta,$$
$$\frac{\partial C}{\partial q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta';$$

und erwägen, dass die Werthe der so entstehenden Differentiale $dt$, $du$ den Grössen $Tdx + Udy$ resp. $Udx + Vdy$ gleich sein

müssen, und zwar für beliebige Werthe der Differentiale $dx$, $dy$, so finden wir nach einigen nahe liegenden Transformationen:

$$\begin{aligned}
C^3T &= \alpha Ab'^2 + \beta Bb'^2 + \gamma Cb'^2 \\
&\quad - 2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' \\
&\quad + \alpha'' Ab^2 + \beta'' Bb^2 + \gamma'' Cb^2, \\
C^3U &= - \alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' \\
&\quad + \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\
&\quad - \alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab, \\
C^3V &= \alpha Aa'^2 + \beta Ba'^2 + \gamma Ca'^2 \\
&\quad - 2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' \\
&\quad + \alpha'' Aa^2 + \beta'' Ba^2 + \gamma'' Ca^2.
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch zur Abkürzung setzen

$$\begin{aligned}
(1)\quad & A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \\
(2)\quad & A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \\
(3)\quad & A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'',
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
C^3T &= Db'^2 - 2D'bb' + D''b^2, \\
C^3U &= - Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab, \\
C^3V &= Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nach Ausführung der Rechnung

$$\begin{aligned}
C^6(TV - U^2) &= (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 \\
&= (DD'' - D'^2)\,C^2,
\end{aligned}$$

und mithin wird die Formel für das Krümmungsmaass

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

[118] 11.

Die eben gefundene Formel bahnt nun den Uebergang zu einer andern, die als einer der fruchtbarsten Sätze in der Lehre von den krummen Flächen anzusehen ist. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 = E, \\
& aa' + bb' + cc' = F, \\
& a'^2 + b'^2 + c'^2 = G, \\
(4)\quad & a\alpha + b\beta + c\gamma = m, \\
(5)\quad & a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m', \\
(6)\quad & a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(7)\quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n,\\&(8)\quad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n',\\&(9)\quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'',\end{aligned}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \triangle.$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (1), (4), (7) die Grössen $\beta$, $\gamma$, was dadurch geschieht, dass wir jene Gleichungen resp. mit $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$ multipliciren und dann addiren, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}&[A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC)]\,\alpha\\&= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC),\end{aligned}$$

eine Gleichung, die wir leicht in die folgende überführen können:

$$AD = \alpha\triangle + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

Auf gleiche Weise ergiebt die Elimination der Grössen $\alpha$, $\gamma$ oder $\alpha$, $\beta$ aus denselben Gleichungen

$$\begin{aligned}BD &= \beta\triangle + b(nF - mG) + b'(mF - nE),\\CD &= \gamma\triangle + c(nF - mG) + c'(mF - nE).\end{aligned}$$

Multipliciren wir die letzten drei Gleichungen mit $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ und addiren sie, so erhalten wir

$$(10)\quad \begin{aligned}DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\triangle + m''(nF - mG)\\ + n''(mF - nE).\end{aligned}$$

Wenn wir sodann die Gleichungen (2), (5), (8) auf gleiche Weise behandeln, so wird

$$\begin{aligned}AD' &= \alpha'\triangle + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E),\\BD' &= \beta'\triangle + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E),\\CD' &= \gamma'\triangle + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E),\end{aligned}$$

[**119**] und die Addition dieser Gleichungen, nachdem sie mit $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ multiplicirt sind, liefert

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\triangle + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

Eine Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (10) führt zu dem Resultat

$$\begin{aligned}&DD'' - D'^2 = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\triangle\\&+ E(n'^2 - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm'').\end{aligned}$$

Ferner erhellt, dass

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 2m, \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 2m', \quad \frac{\partial G}{\partial p} = 2n', \quad \frac{\partial G}{\partial q} = 2n'',$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = m' + n, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = m'' + n'$$

oder

$$m = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, \quad m' = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{dq}, \quad m'' = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$n = \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \quad n' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, \quad n'' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}$$

ist. Ausserdem lässt sich leicht zeigen, dass

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = \frac{\partial n}{\partial q} - \frac{\partial n'}{\partial p} = \frac{\partial m''}{\partial p} - \frac{\partial m'}{\partial q}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}$$

ist. Wenn wir nun diese verschiedenen Ausdrücke in der Formel für das Krümmungsmaass, die am Schluss des vorhergehenden Artikels entwickelt ist, substituiren, so gelangen wir zu der folgenden Formel, die allein aus den Grössen $E$, $F$, $G$ und deren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung zusammengesetzt ist:

$$4(EG - F^2)^2 . k$$

$$= E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right]$$

$$+ F\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q} + 4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right]$$

$$+ G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right]$$

$$[120] \qquad - 2(EG - F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right].$$

## 12.

Da die Beziehung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2\,Fdp\,dq + Gdq^2$$

unbeschränkt gilt, so erhellt, dass

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

der allgemeine Ausdruck für das Bogenelement auf der krummen Fläche ist. Das im vorigen Artikel entwickelte Resultat zeigt daher, dass man zur Auffindung des Krümmungsmaasses der endlichen Formeln, welche die Coordinaten $x, y, z$ als Functionen der Veränderlichen $p$, $q$ darstellen, gar nicht bedarf, dass vielmehr dazu der allgemeine Ausdruck für die Grösse eines beliebigen Bogenelements ausreicht. Gehen wir nun zu einigen Anwendungen dieses äusserst wichtigen Satzes.

Wir wollen annehmen, dass unsere krumme Fläche auf eine andere Fläche, sei dieselbe gekrümmt oder eben, abgewickelt werden kann, so dass jedem Punkt der ersten Fläche, der durch die Coordinaten $x$, $y$, $z$ bestimmt ist, ein bestimmter Punkt der zweiten entspricht, dessen Coordinaten $x', y', z'$ seien. Offenbar können dann auch $x'$, $y'$, $z'$ als Functionen der Veränderlichen $p$, $q$ betrachtet werden; dadurch entsteht für das Bogenelement $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ ein Ausdruck der Form

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2},$$

wobei $E'$, $F'$, $G'$ ebenfalls Functionen von $p$ und $q$ bezeichnen. Aber aus dem blossen Begriff der Abwickelung einer Fläche auf eine andere geht hervor, dass Elemente, die einander auf beiden Flächen entsprechen, nothwendig gleich sind, und dass daher die Gleichungen

$$E = E',\ F = F',\ G = G'$$

identisch erfüllt sein müssen. Die Formel des vorhergehenden Artikels führt daher von selbst zu dem hervorragend wichtigen

Lehrsatz. Wenn eine krumme Fläche auf irgend eine andere Fläche abgewickelt wird, so bleibt dabei das Krümmungsmaass in den einzelnen Punkten ungeändert.

[121] Offenbar wird auch jeder endliche Theil der krummen Fläche nach der Abwickelung auf eine andere Fläche dieselbe Gesammtkrümmung behalten. Einen besonderen Fall, auf den die Geometer bisher ihre Untersuchungen beschränkt haben, bilden die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen. Unsere Theorie ergiebt von selbst, dass das Krümmungsmaass derartiger Flächen in jedem Punkte $= 0$ wird, weshalb für dieselben, wenn sie nach der dritten Methode analytisch ausgedrückt werden, überall

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

wird, ein Kriterinm, das zwar längst bekannt ist, meistentheils aber, wenigstens nach unserer Ansicht, nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen wird.

13.

Der in vorigem Artikel abgeleitete Satz führt dahin, die krummen Flächen aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten, nnd diese neue Betrachtungsweise verdient von Seiten der Geometer eine sorgfältige Ausbildung. Falls man nämlich die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindend klein ist, und zngleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet, hängen die Eigenschaften einer Fläche theils von der Form ab, welche dieselbe gerade angenommen hat, theils aber sind sie absolute und bleiben nngeändert, in welche Form jene auch gebogen wird. Zu den letzteren Eigenschaften, deren Untersuchung der Geometrie ein neues und fruchtbares Feld eröffnet, gehört das Krümmungsmaass und die Gesammtkrümmung in dem Sinne, wie diese Ausdrücke von uns aufgefasst sind; ferner gehört hierher die Lehre von den kürzesten Linien und einiges Andere, dessen Behandlung wir uns für später vorbehalten. Bei dieser Auffassung wird eine ebene Fläche nnd eine auf die Ebene abwickelbare Fläche, wie z. B. eine Cylinderfläche, Kegelfläche u. s. w., als wesentlich identisch angesehen. Der eigentliche Ansgangspunkt für den allgemeinen Ausdruck einer Fläche bei solcher Auffassnng liegt in der Formel

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2},$$

welche den Zusammenhang [**122**] eines Bogenelements mit zwei Hülfsvariabeln darstellt. Aber bevor wir diesen Gegenstand weiter verfolgen, müssen wir die Principien der Theorie der kürzesten Linien auf einer gegebenen Fläche vorausschicken.

14.

Eine Ranmcurve wird im allgemeinen dadurch gegeben, dass die den einzelnen Punkten zugehörigen Coordinaten als Functionen einer einzigen Variabeln dargestellt werden, die wir mit

$w$ bezeichnen wollen. Die Länge einer solchen Linie von einem willkürlichen Anfangspunkte bis zu dem Punkte, dessen Coordinaten $x$, $y$, $z$ sind, wird ausgedrückt durch das Integral

$$\int dw \, . \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Wenn wir nun annehmen, dass die Lage der Curve eine unendlich kleine Veränderung erfahre, derart, dass die Coordinaten der einzelnen Punkte um $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ geändert werden, so ergiebt sich die Aenderung der ganzen Länge

$$= \int \frac{dx \, . \, d\delta x + dy \, . \, d\delta y + dz \, . \, d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

und diesen Ausdruck transformiren wir in den folgenden:

$$\frac{dx \, . \, \delta x + dy \, . \, \delta y + dz \, . \, \delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$- \int \left[ \delta x \, . \, d\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right) + \delta y \, . \, d\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right) \right.$$

$$\left. + \, \delta z \, . \, d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right) \right].$$

In dem Falle, wo die Linie eine kürzeste zwischen ihren Endpunkten ist, muss bekanntlich der Ausdruck, der hier unter dem Integralzeichen steht, verschwinden. Falls die Linie auf einer gegebenen Fläche liegen soll, welche durch die Gleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

ausgedrückt wird, müssen auch die Variationen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ der Gleichung

$$P \delta x + Q \delta y + R \delta z = 0$$

genügen, woraus man nach bekannten Regeln leicht schliesst, dass die Differentiale

$$d\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right), \quad d\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right),$$

$$d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right)$$

[**123**] resp. den Grössen $P$, $Q$, $R$ proportional sein müssen. Es

sei ferner $dr$ ein Element der Curve, $\lambda$ der Punkt auf der Kugelfläche, welcher die Richtung dieses Elements darstellt, $L$ der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung der Normale der krummen Fläche darstellt; endlich seien $\xi, \eta, \zeta$ die Coordinaten des Punktes $\lambda$ und $X, Y, Z$ die Coordinaten des Punktes $L$, sämmtlich auf den Mittelpunkt der Kugel bezogen. Dann ist

$$dx = \xi . dr, \quad dy = \eta . dr, \quad dz = \zeta . dr,$$

woraus folgt, dass die obigen Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ werden. Und da die Grössen $P$, $Q$, $R$ den $X$, $Y$, $Z$ proportional sind, so besteht die Eigenthümlichkeit einer kürzesten Linie darin, dass sie den Gleichungen

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}$$

genügt. Uebrigens übersieht man leicht, dass

$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$$

gleich wird dem kleinen Bogen auf der Kugelfläche, welcher den Winkel zwischen den Richtungen der Tangenten am Anfang und am Ende des Elements $dr$ misst, und daher $= \frac{dr}{\varrho}$, wenn $\varrho$ den Krümmungsradius in dem betreffenden Punkte der kürzesten Linie bezeichnet. So wird also

$$\varrho . d\xi = X . dr, \quad \varrho . d\eta = Y . dr, \quad \varrho . d\zeta = Z . dr.$$

## 15.

Wir wollen annehmen, dass auf der krummen Fläche von einem gegebenen Punkte $A$ unzählig viel kürzeste Linien ausgehen; sie unterscheiden sich von einander durch den Winkel, welchen das erste Element jeder einzelnen mit dem ersten Element einer von ihnen, die wir als erste nehmen, bildet: es sei $\varphi$ jener Winkel, oder allgemeiner eine Function jenes Winkels, ferner $r$ die Länge einer solchen kürzesten Linie vom Punkte $A$ bis zu dem Punkte, dessen Coordinaten $x$, $y$, $z$ sind. Da jetzt bestimmten Werthen der Variabeln $r$, $\varphi$ bestimmte Punkte der Fläche zugehören, so können wir die Coordinaten $x$, $y$, $z$ als Functionen von $r$, $\varphi$ ansehen. Die Bezeichnungen $\lambda$, $L$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $X$, $Y$, $Z$ wollen wir in derselben Bedeutung beibehalten wie

[124] im vorigen Artikel, nur sollen sich dieselben unbeschränkt auf einen unbestimmten Punkt irgend einer der kürzesten Linien beziehen.

Alle kürzesten Linien, die gleiche Länge $r$ besitzen, werden bis zu einer andern Linie reichen, deren von einem willkürlichen Anfangspunkte ab gerechnete Länge wir mit $v$ bezeichnen. Es kann dann $v$ als Function von $r$ und $\varphi$ angesehen werden, und wenn wir mit $\lambda'$ den Punkt auf der Kugelfläche bezeichnen, der der Richtung des Elements $dv$ entspricht, ebenso mit $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ die Coordinaten dieses Punktes, bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel, so haben wir

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \xi' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \eta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \zeta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Hieraus, in Verbindung mit

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \eta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \zeta,$$

folgt

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$
$$= \cos \lambda\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Das erste Glied dieser Gleichung, das gleichfalls eine Function von $r$ und $\varphi$ ist, bezeichnen wir mit $S$; die Differentiation desselben nach $r$ ergiebt

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right]}{\partial \varphi}$$
$$= \frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{\partial \varphi}.$$

Es ist aber

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

und daher die Ableitung dieses Ausdrucks $= 0$; und aus dem vorigen Artikel wissen wir, dass, wenn auch hier $\varrho$ den Krümmungsradius der Linie $r$ bezeichnet,

[125] $$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{X}{\varrho}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{Y}{\varrho}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{Z}{\varrho}$$

ist. Somit erhalten wir

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{\varrho}(X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{\varrho} \cos L\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0,$$

da, wie leicht ersichtlich, $\lambda'$ auf dem grössten Kreise liegt, dessen Pol $L$ ist. Daraus schliessen wir, dass $S$ unabhängig von $r$ und daher allein eine Function von $\varphi$ ist. Aber für $r = 0$ wird offenbar $v = 0$ und ferner auch $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$, desgleichen $S = 0$ unabhängig von $\varphi$. Nothwendig muss daher allgemein $S = 0$ sein nnd daher $\cos \lambda\lambda' = 0$, d. h. $\lambda\lambda' = 90^0$. Das Resultat fassen wir zusammen in folgenden

Lehrsatz. Werden auf einer krnmmen Fläche von demselben Anfangspnnkte ans kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen, so steht die ihre Endpunkte verbindende Linie auf ihnen allen senkrecht.

Wir haben geglaubt, dass es der Mühe werth sei, diesen Satz aus der Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie abzuleiten: übrigens kann man die Richtigkeit desselben auch ohne Rechnung durch folgende Ueberlegung erkennen. Es seien $AB$, $AB'$ zwei kürzeste Linien von derselben Länge, die einen nnendlich kleinen Winkel bei $A$ einschliessen. Angenommen nun, es wäre einer der beiden Winkel, den das Element $BB'$ mit den Linien $BA$, $BA'$ bildet, um eine endliche Grösse von einem rechten Winkel unterschieden, dann müsste nach dem Gesetze der Stetigkeit einer jener beiden Winkel grösser, der andere kleiner sein als ein Rechter. Es werde angenommen, dass der Winkel bei $B = 90^0 - \omega$ sei; bestimmt man dann auf der Linie $BA$ denjenigen Punkt $C$, für den

$$BC = \frac{BB'}{\sin \omega}:$$

so wäre, da das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als ein ebenes behandelt werden kann,

$$CB' = BC . \cos \omega$$

nnd daher

$$AC + CB' = AC + BC.\cos\omega = AB - BC(1 - \cos\omega$$
$$= AB' - BC(1 - \cos\omega),$$

d. h. der Weg vom Punkte $A$ nach $B'$ über $C$ wäre kürzer als die kürzeste Linie, was widersinnig ist.

16.

[126] Mit dem Satze des vorigen Artikels verbinden wir einen andern, den wir folgendermaassen aussprechen. Wenn man auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen denkt, von deren einzelnen Punkten unter rechten Winkeln und nach derselben Seite hin unzählige kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Curve, welche die andern Endpunkte derselben verbindet, jene sämmtlich unter rechten Winkeln. Zum Beweise braucht man in der obigen Entwickelung nichts zu ändern, als dass $\varphi$ die Länge der gegebenen Curve, von einem willkürlichen Punkte an gerechnet, bezeichnen soll, oder auch eine Function dieser Länge. Dann werden alle Schlüsse auch jetzt noch Gültigkeit haben, nur mit dem Unterschied, dass das Bestehen der Gleichnng $S = 0$ für $r = 0$ jetzt schon aus der Voraussetzung sich ergiebt. Uebrigens ist dieser zweite Satz allgemeiner, als der vorhergehende, der sogar als in ihm enthalten aufgefasst werden kann, wenn man nur als gegebene Linie einen unendlich kleinen um $A$ beschriebenen Kreis nimmt. Endlich bemerken wir, dass auch hier geometrische Ueberlegungen an die Stelle der Rechnnng treten können; doch wollen wir uns bei denselben, da sie ziemlich nahe liegen, nicht aufhalten.

17.

Wir kehren zu der Formel

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2},$$

welche ohne Beschränkung die Grösse eines Bogenelements auf der krummen Fläche ausdrückt, zurück, und prüfen vor allem die geometrische Bedeutung der Coefficienten $E, F, G$. Schon in Art. 5 haben wir darauf hingewiesen, dass man auf der krummen Fläche zwei Systeme von Linien gezogen denken kann,

eines, für dessen einzelne Linien allein $p$ veränderlich, $q$ constant ist, während auf den Linien des andern allein $q$ veränderlich, $p$ dagegen constant ist. Ein beliebiger Punkt der Fläche kann als Schnittpunkt einer Linie des ersten Systems mit einer des zweiten angesehen werden; und dann ist das Bogenelement der ersten von dem betreffenden Pnnkte ausgehenden Linie, das der Aenderung $dp$ entspricht, $= \sqrt{E} \,.\, dp$; ebenso ist das Element der zweiten Linie, das zur Aenderung $dq$ gehört, $= \sqrt{G} \,.\, dq$. Bezeichnet man endlich mit $\omega$ den Winkel zwischen diesen Elementen, so erkennt man leicht, dass

$$[127] \qquad \cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

wird. Ferner ist der Inhalt des parallelogrammförmigen Flächenelements, das von zwei Linien des ersten Systems, zu denen die Werthe $q$ und $q + dq$ gehören, und von zwei Linien des zweiten Systems, zu denen die Werthe $p$ und $p + dp$ gehören, begrenzt wird,

$$= \sqrt{EG - F^2} \,.\, dp \,.\, dq.$$

Eine beliebige Linie auf der Fläche, die zu keinem jener beiden Systeme gehört, entsteht, wenn man $p$ und $q$ als Functionen einer neuen Veränderlichen, oder eine von beiden als Function der andern auffasst. Es sei $s$ die Länge einer solchen Cnrve, von einem beliebigen Anfangspnnkte an gerechnet und beliebig nach einer oder der andern Seite als positiv betrachtet. Es bezeichne $\theta$ den Winkel, welchen das Element

$$ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

mit der durch den Anfangspunkt des Elements gelegten Linie des ersten Systems bildet, und zwar soll, damit kein Doppelsinn möglich ist, dieser Winkel stets als von der Seite jener Linie, auf der die Werthe von $p$ wachsen, anfangend und nach der Seite hin als positiv angenommen werden, nach der die Werthe von $q$ wachsen. Nach diesen Festsetzungen übersieht man leicht, dass

$$\cos\theta \,.\, ds = \sqrt{E} \,.\, dp + \sqrt{G} \,.\, \cos\omega \,.\, dq = \frac{Edp + Fdq}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\theta \,.\, ds = \sqrt{G} \,.\, \sin\omega \,.\, dq = \frac{\sqrt{EG - F^2} \,.\, dq}{\sqrt{E}}$$

ist.

18.

Es soll nun die Bedingung dafür gesucht werden, dass diese Linie eine kürzeste ist. Da die Länge von $s$ durch das Integral

$$s = \int \sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

ausgedrückt wird, so erfordert die Bedingung des Minimums, dass die durch eine unendlich kleine Aenderung in der Lage der Linie entstehende Variation $= 0$ werde. Die zum Ziele führende Rechnung wird in diesem Falle am zweckmässigsten durchgeführt, wenn $p$ als Function von $q$ betrachtet wird. Somit ist, wenn die Variation durch die Charakteristik $\delta$ bezeichnet wird, [128]

$$\delta s = \int \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial p} dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p} dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p} dq^2\right)\delta p + (2Edp + 2Fdq)\,d\delta p}{2ds}$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{ds}\,\delta p$$

$$+ \int \delta p \left\{ \frac{\frac{\partial E}{\partial p} dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p} dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p} \partial q^2}{2ds} - d\left(\frac{Edp + Fdq}{ds}\right) \right\},$$

und es muss bekanntlich das, was hier unter dem Integralzeichen steht, unabhängig von $\delta p$ verschwinden. Es wird daher

$$\frac{\partial E}{\partial p} dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p} dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p} dq^2 = 2ds \,.\, d\left(\frac{Edp + Fdq}{ds}\right)$$

$$= 2ds \,.\, d(\sqrt{E} \,.\, \cos\theta) = \frac{ds \,.\, dE \,.\, \cos\theta}{\sqrt{E}} - 2ds \,.\, d\theta \,.\, \sqrt{E} \,.\, \sin\theta$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{E} \,.\, dE - 2\sqrt{EG - F^2} \,.\, dq \,.\, d\theta$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial p} dp + \frac{\partial E}{\partial q} dq\right) - 2\sqrt{EG - F^2} \,.\, dq \,.\, d\theta.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Bedingungsgleichung für eine kürzeste Linie:

$$\sqrt{EG - F^2} \,.\, d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial p} dp + \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial q} dq + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q} dp$$

$$- \frac{\partial F}{\partial p} dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} dq;$$

dieselbe kann man auch so schreiben:

$$\sqrt{EG-F^2}\,.\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}dE + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{\partial F}{\partial p}dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq.$$

Uebrigens könnte man mit Hülfe der Gleichung

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}$$

[**129**] aus jener Gleichung den Winkel $\theta$ eliminiren und so eine Differentialgleichung zwischen $p$ und $q$ ableiten; diese würde jedoch complicirter und bei den Anwendungen von geringerem Nutzen sein, als die vorstehende.

## 19.

Die allgemeinen Formeln für das Krümmungsmaass und für die Richtungsänderung einer kürzesten Linie, die in den Artikeln 11, 18 abgeleitet sind, werden viel einfacher, wenn die Grössen $p$, $q$ so gewählt sind, dass die Linien des ersten Systems die des zweiten überall senkrecht schneiden, d. h. dass allgemein $\omega = 90^0$ oder $F = 0$ ist. Dann ergiebt sich nämlich für das Krümmungsmaass

$$4E^2G^2k = E\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} + E\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 + G\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} + G\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2$$
$$- 2EG\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right),$$

und für die Aenderung des Winkels $\theta$

$$\sqrt{EG}\cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq.$$

Unter den verschiedenen Fällen, in denen die obige Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist, nimmt den ersten Platz der ein, wo alle Linien des einen der beiden Systeme, z. B. des ersten, kürzeste Linien sind. Hier wird für einen constanten Werth von $q$ der Winkel $\theta = 0$, die eben aufgestellte Gleichung für die Aenderung des Winkels $\theta$ lehrt daher, dass $\frac{\partial E}{\partial q} = 0$ oder der Coefficient $E$ von $q$ unabhängig sein muss, d. h. $E$ muss entweder constant oder eine Function von $p$ allein sein. Am ein-

fachsten ist es, für $p$ die Länge einer Linie des ersten Systems zn wählen, und dieselbe, falls alle Linien des ersten Systems in einem Punkte zusammenlaufen, von diesem Punkte ab zu rechnen, oder, wenn ein gemeinsamer Schnittpunkt nicht existirt, von irgend einer Linie des zweiten Systems ab. Aus diesen Festsetzungen erhellt, dass $p$ und $q$ jetzt dasselbe bezeichnen, was in den Artikeln 15, 16 durch $r$ nnd $\varphi$ ausgedrückt war, und [**130**] dass $E = 1$ wird. Damit gehen die beiden vorhergehenden Formeln in folgende über:

$$4G^2 k = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial p^2},$$

$$\sqrt{G}\,.\,d\theta = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq,$$

oder, wenn man $\sqrt{G} = m$ setzt,

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}, \quad d\theta = -\frac{\partial m}{\partial p}dq.$$

Allgemein zu reden, wird $m$ eine Function von $p$ und $q$ und $mdq$ der Ausdruck für das Bogenelement einer Linie des zweiten Systems. In dem besonderen Falle aber, wo alle Linien $p$ von demselben Punkte ausgehen, muss offenbar für $p = 0$ auch $m = 0$ sein; wenn man ferner in diesem Falle für $q$ den Winkel selbst wählt, den das erste Element irgend einer Linie des ersten Systems mit dem ersten Element einer andern, beliebig gewählten Linie bildet, so wird für einen unendlich kleinen Werth von $p$ das Element einer Linie des zweiten Systems (die dann als ein mit dem Radius $p$ beschriebener Kreis angesehen werden kann) gleich $pdq$, und daher wird für einen nnendlich kleinen Werth von $p$ auch $m = p$; mithin wird für $p = 0$ gleichzeitig $m = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial p} = 1$.

20.

Wir wollen vorläufig noch dieselbe Annahme beibehalten, dass nämlich $p$ die Länge einer kürzesten Linie bezeichnet, die von einem bestimmten Punkte $A$ nach einem beliebigen Punkte der Fläche gezogen ist, und $q$ den Winkel, den das erste Element dieser Linie mit dem ersten irgend einer andern von $A$ ausgehenden kürzesten Linie bildet. Es sei $B$ ein bestimmter Punkt auf der Linie, für welche $q = 0$ ist, nnd $C$ ein anderer

bestimmter Punkt der Fläche, für welchen der Werth von $q$ einfach durch $A$ bezeichnet werden soll. Die Punkte $B$ und $C$ mögen durch eine kürzeste Linie verbunden sein; irgend ein Stück derselben, von $B$ an gerechnet, soll wie in Art. 18 mit $s$ bezeichnet werden, desgleichen, genau ebenso wie dort, mit $\theta$ der Winkel, [131] den irgend ein Element $ds$ mit $dp$ bildet: endlich mit $\theta^0$ und $\theta'$ die Werthe des Winkels $\theta$ in den Punkten $B$ und $C$. Man hat dann auf der krummen Fläche ein von kürzesten Linien begrenztes Dreieck, und von den Winkeln bei $B$ und $C$, die einfach mit diesen Buchstaben bezeichnet werden sollen, wird der erste die Ergänzung des Winkels $\theta^0$ zu $180^0$, während der zweite $\theta'$ selber ist. Da indessen bei unsern Entwickelungen, wie üblich, alle Winkel nicht in Graden, sondern durch blosse Zahlen ausgedrückt werden, so dass der Winkel $57^0\,17'\,45''$, zu welchem ein dem Radius gleicher Bogen gehört, als Einheit genommen wird, so muss, falls $2\pi$ den Kreisumfang bezeichnet,

$$\theta^0 = \pi - B, \quad \theta' = C$$

gesetzt werden. Es soll nun die Gesammtkrümmung dieses Dreiecks bestimmt werden; dieselbe ist

$$= \int k\, d\sigma,$$

falls $d\sigma$ ein Flächenelement des Dreiecks ist. Da nun dies Element durch $m\,dp\,dq$ ausgedrückt wird, so muss man das Integral

$$\iint k m\, dp\, dq,$$

über die ganze Dreiecksfläche ausgedehnt, ermitteln. Wird zuerst nach $p$ integrirt, so ergiebt sich, da

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}$$

ist,

$$dq\left(\text{Const.} - \frac{\partial m}{\partial p}\right)$$

als Gesammtkrümmung der Fläche, die zwischen den Linien des ersten Systems liegt, denen die Werthe $q$ und $q + dq$ zugehören: da diese Krümmung für $p = 0$ verschwinden muss, so muss die Integrationsconstante gleich dem Werthe von $\frac{\partial m}{\partial p}$ für $p = 0$, d. h. gleich 1 sein. Das vorige Resultat ist daher

$$dq\left(1-\frac{\partial m}{\partial p}\right),$$

wo man für $\frac{\partial m}{\partial p}$ den Werth nehmen muss, der zu der auf der Linie $BC$ gelegenen Grenze der in Rede stehenden Fläche gehört. Auf dieser Linie aber wird nach dem vorhergehenden Artikel

$$\frac{\partial m}{\partial p}\cdot dq = -d\theta,$$

wodurch der fragliche Ausdruck sich in $dq + d\theta$ umwandelt. Da noch eine zweite von $q = 0$ bis $q = A$ zu erstreckende Integration hinzukommt, so ergiebt sich die Gesammtkrümmung des Dreiecks

$$= A + \theta' - \theta^0 = A + B + C - \pi.$$

[**132**] Die Gesammtkrümmung ist gleich dem Flächeninhalte des Theiles der Kugelfläche, welcher dem Dreieck entspricht, mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem die Fläche, auf der das Dreieck liegt, concav-concav oder concav-convex ist. Als Flächeneinheit ist dabei das Quadrat zu nehmen, dessen Seite $= 1$ (gleich dem Kugelradius) ist, wonach die ganze Kugelfläche $= 4\pi$ wird. Es verhält sich daher der Theil der Kugelfläche, welcher dem Dreieck entspricht, zur Fläche der ganzen Kugel wie $\pm(A + B + C - \pi)$ zu $4\pi$. Dieser Satz, der zweifellos zu den elegantesten in der Flächentheorie gehört, kann auch folgendermaassen ausgesprochen werden:

Der Ueberschuss der Winkelsumme eines von kürzesten Linien auf einer concav-concaven Fläche gebildeten Dreiecks über 180°, oder der Fehlbetrag der Winkelsumme eines von kürzesten Linien auf einer concav-convexen Fläche gebildeten Dreiecks an 180° wird gemessen durch den Flächeninhalt desjenigen Theils einer Kugelfläche, der jenem Dreieck bei Abbildung durch gleichgerichtete Normalen entspricht, falls die ganze Kugelfläche = 720° gesetzt wird.

Allgemeiner ist in jedem Polygon von $n$ Seiten, deren jede eine kürzeste Linie bildet, der Ueberschuss der Winkelsumme über $(2n - 4)$ Rechte oder der Fehlbetrag an $(2n - 4)$ Rechten, je nach der Art der Flächenkrümmung, gleich dem Flächen-

inhalt des entsprechenden Polygons auf der Kugelfläche, falls die ganze Oberfläche der Kugel $= 720^0$ gesetzt wird. Es ergiebt sich dies unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze durch Zerlegung des Polygons in Dreiecke.

## 21.

Es sollen jetzt wiederum die Zeichen $p$, $q$, $E$, $F$, $G$, $\omega$ in dem allgemeinen Sinne gebraucht werden, in dem sie oben angewandt waren; es werde ferner angenommen, dass die betrachtete Fläche noch auf eine andere Weise durch zwei Variable $p'$, $q'$ bestimmt werden kann, wobei das Bogenelement durch

$$\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2}$$

ausgedrückt werde. [133] Dann gehören zu jedem Punkte der Fläche, welcher durch bestimmte Werthe der Variabeln $p$, $q$ gegeben ist, auch bestimmte Werthe von $p'$, $q'$, weshalb diese letzteren Functionen von $p$ und $q$ sind. Ihre Differentiation möge ergeben

$$dp' = \alpha dp + \beta dq,$$
$$dq' = \gamma dp + \delta dq.$$

Es soll die geometrische Bedeutung der Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ gesucht werden. Man muss dazu vier Systeme von Linien auf der krummen Fläche ins Auge fassen, für welche resp. $q$, $p$, $q'$, $p'$ constant sind. Denkt man durch einen bestimmten Punkt, welchem die Werthe $p$, $q$, $p'$, $q'$ der Variabeln zugehören, die vier Linien gezogen, welche je einem jener Systeme angehören, so werden die den positiven Aenderungen $dp$, $dq$, $dp'$, $dq'$ entsprechenden Elemente derselben

$$\sqrt{E}.dp, \quad \sqrt{G}.dq, \quad \sqrt{E'}.dp', \quad \sqrt{G'}.dq'.$$

Die Winkel, welche die Richtungen dieser Elemente mit einer willkürlich gewählten festen Richtung bilden, sollen mit $M$, $N$, $M'$, $N'$ bezeichnet werden, wobei die Winkel nach der Seite hin als wachsend angenommen werden, auf welcher das zweite Element von dem ersten aus liegt, so dass $\sin(N - M)$ eine positive Grösse wird: es werde ausserdem (was ohne weiteres freisteht) angenommen, dass das vierte Element in Bezug auf das dritte die gleiche Lage hat, so dass auch $\sin(N' - M')$ positiv ist. Wird nach diesen Festsetzungen ein andrer Punkt ins Auge gefasst, der von dem ersten eine unendlich kleine Entfernung

hat, und dem die Werthe $p + dp$, $q + dq$, $p' + dp'$, $q' + dq'$ der Variabeln zngehören, so sieht man ohne Mühe, dass allgemein, d. h. unabhängig von den Werthen der Variationen $dp$, $dq$, $dp'$, $dq'$,

$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin M + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin N$$
$$= \sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin N'$$

ist; beide Ausdrücke sind ja nichts anderes, als der Abstand des neuen Punktes von der Linie, an der die obigen Winkel sämmtlich ihren Anfang nehmen. Nach einer schon früher eingeführten Bezeichnung ist aber

$$N - M = \omega,$$

und analog werde

$$N' - M' = \omega',$$

ausserdem

$$N - M' = \psi$$

gesetzt. Dann kann die eben gefundene Gleichung folgendermaassen ausgedrückt werden: [**134**]

$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin(M' - \omega + \psi) + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin(M' + \psi)$$
$$= \sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin(M' + \omega')$$

oder auch

$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin(N' - \omega - \omega' + \psi) + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin(N' - \omega' + \psi)$$
$$= \sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin(N' - \omega') + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin N'.$$

Da diese Gleichung offenbar unabhängig von der Anfangsrichtung stattfinden muss, so kann man letztere willkürlich annehmen. Setzt man daher in der zweiten Form $N' = 0$ oder in der ersten $M' = 0$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\sqrt{E'}\,.\,\sin\omega'\,.\,dp'$$
$$= \sqrt{E}\,.\,\sin(\omega + \omega' - \psi)\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\,\sin(\omega' - \psi)\,.\,dq,$$
$$\sqrt{G'}\,.\,\sin\omega'\,.\,dq' = \sqrt{E}\,.\,\sin(\psi - \omega)\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\,\sin\psi\,.\,dq;$$

und diese Gleichungen ergeben, da sie mit den Gleichungen

$$dp' = \alpha\,dp + \beta\,dq,$$
$$dq' = \gamma\,dp + \delta\,dq$$

identisch sein müssen, die zu bestimmenden Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Dieselben werden

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin\omega'}, \quad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin\omega'},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}} \cdot \frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin\omega'}, \quad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\omega'}.$$

Mit diesen muss man die Gleichungen

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos\omega' = \frac{F}{\sqrt{E'G'}},$$

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \quad \sin\omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{E'G'}}$$

verbinden, und daher können die vier obigen Gleichungen auch so geschrieben werden:

$$\alpha \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG'} \,.\, \sin(\omega + \omega' - \psi),$$

$$\beta \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GG'} \,.\, \sin(\omega' - \psi),$$

$$\gamma \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EE'} \,.\, \sin(\psi - \omega),$$

$$\delta \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GE'} \,.\, \sin\psi.$$

Da durch die Substitution von

$$dp' = \alpha\, dp + \beta\, dq, \quad dq' = \gamma\, dp + \delta\, dq$$

[135] das Trinom

$$E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2$$

in

$$E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$$

übergehen muss, so erhält man

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)\,(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Umgekehrt muss das letztere Trinom wieder in das erste übergehen durch die Substitution

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dp = \delta\, dp' - \beta\, dq',$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dq = -\gamma\, dp' + \alpha\, dq',$$

und daher ergiebt sich

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot E',$$

$$-E\beta\delta + F(\alpha\delta + \beta\gamma) - G\alpha\gamma = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot F',$$

$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot G'.$$

## 22.

An die allgemeine Untersuchung des vorhergehenden Artikels soll eine nahe liegende Anwendung angeknüpft werden, bei der, während $p$, $q$ noch ihre allgemeine Bedentung behalten, für $p'$, $q'$ die in Art. 15 mit $r$, $\varphi$ bezeichneten Grössen genommen werden sollen; anch sollen diese Buchstaben beibehalten werden, so dass für jeden Pnnkt der Fläche $r$ seine kürzeste Entfernnng von einem bestimmten Pnnkte ist nnd $\varphi$ der Winkel, welchen im letzteren Pnnkte das erste Element von $r$ mit einer festen Richtung bildet. Dann ist

$$E' = 1,\ F' = 0,\ \omega' = 90^\circ.$$

Es werde ausserdem

$$\sqrt{G'} = m$$

gesetzt, so dass irgend ein Bogenelement

$$= \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$$

wird. Dann geben die vier im vorhergehenden Artikel für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ entwickelten Gleichungen:

$$1)\ \sqrt{E} \cdot \cos(\omega - \psi) = \frac{\partial r}{\partial p},$$

$$2)\ \sqrt{G} \cdot \cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q},$$

$$3)\ \sqrt{E} \cdot \sin(\psi - \omega) = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \qquad [136]$$

$$4)\ \sqrt{G} \cdot \sin\psi = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Die letzte und vorletzte Gleichnng des vorhergehenden Artikels aber giebt

$$5)\ EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,$$

$$6)\ \left(E\frac{\partial r}{\partial q} - F\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F\frac{\partial r}{\partial q} - G\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Aus diesen Gleichungen können die Grössen $r$, $\varphi$, $\psi$ und (falls es nöthig ist) $m$ durch $p$ und $q$ bestimmt werden: die Integration der Gleichnng 5) ergiebt nämlich $r$, und wenn dies gefunden, liefert die Integration der Gleichung 6) $\varphi$, ferner eine der beiden Gleichnngen 1), 2) $\psi$; endlich erhält man $m$ ans einer der beiden Gleichnngen 3), 4).

Die allgemeine Integration der Gleichungen 5), 6) muss nothwendig zwei willkürliche Functionen ergeben, deren Bedeutung man leicht erkennt, wenn man erwägt, dass die Gültigkeit jener Gleichungen nicht anf den hier betrachteten Fall beschränkt ist, sondern dass dieselben eben so gelten, wenn $r$ und $\varphi$ in der allgemeinen Bedeutung des Art. 16 genommen werden, so dass $r$ die Länge einer kürzesten Linie ist, die zu einer bestimmt gegebenen, aber an sich willkürlichen Curve senkrecht gezogen ist, nnd $\varphi$ eine willkürliche Fnnction der Länge desjenigen Theiles dieser Curve, der zwischen einer nnbestimmten Kürzesten und einem bestimmten, willkürlich zn wählenden Pnnkte liegt. Die allgemeine Lösnng muss nun alles dies unbestimmt lassen, und die willkürlichen Fnnctionen gehen erst dann in bestimmte über, wenn jene willkürliche Cnrve nnd die Function von Theilen derselben, die $\varphi$ darstellen soll, vorgeschriebene Werthe annehmen. In unserm Falle ist an Stelle der Curve der unendlich kleine Kreis zn nehmen, der seinen Mittelpunkt in dem Punkte hat, von dem aus die Längen $r$ gerechnet werden, und $\varphi$ bezeichnet Theile dieses Kreises, durch den Radius dividirt; daraus kann man leicht schliessen, dass die Gleichungen 5), 6) für nnsern Fall völlig hinreichen, wenn nnr über das, was nnbestimmt bleibt, so verfügt wird, dass $r$ und $\varphi$ für jenen Anfangspunkt nnd die demselben unendlich nahen Punkte den obigen Festsetznngen entsprechen.

[**137**] Was übrigens die Integration der Gleichungen 5), 6) betrifft, so kann man dieselbe bekanntlich auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichnngen rednciren; doch sind dieselben meist so verwickelt, dass darans wenig Nntzen entspringt. Dagegen unterliegt die Entwickelnng in Reihen, welche für praktische Bedürfnisse völlig ausreichend sind, so lange es sich um nicht allzugrosse Theile einer Fläche handelt, keiner Schwierigkeit, und damit eröffnen die aufgestellten Formeln eine ergiebige Quelle zur Lösnng vieler sehr wichtiger Aufgaben. Hier soll indessen nur ein einziges Beispiel entwickelt werden, um das Wesen der Methode klar zu legen.

23.

Wir wollen den Fall betrachten, wo alle Linien, für die $p$ constant ist, kürzeste Linien sind, welche die Linie, für welche $\varphi = 0$ ist, nnd die wir gewissermaassen als Abscissenaxe ansehen können, senkrecht schneiden. Es sei $A$ der Punkt, für den $r = 0$ ist, $D$ ein unbestimmter Punkt anf der Abscissenaxe $AD = p$, $B$ ein nnbestimmter Punkt anf der kürzesten Linie, die auf $AD$ in $D$ senkrecht steht, und $BD = q$, so dass $p$ gewissermaassen als Abscisse, $q$ als Ordinate des Punktes $B$ angesehen werden kann. Die Abscissen nehmen wir positiv auf dem Zweige der Abscissenaxe, dem $\varphi = 0$ zugehört, während wir $r$ stets als positive Grösse betrachten; die Ordinaten nehmen wir als positiv anf der Seite an, auf welcher $\varphi$ von 0 bis 180° wächst.

Nach dem Satz des Art. 16 haben wir

$$\omega = 90^\circ, \quad F = 0, \quad \text{ferner } G = 1;$$

dazu setzen wir

$$\sqrt{E} = n.$$

Dann wird $n$ eine Fnnction von $p$ nnd $q$, und zwar eine solche, die $= 1$ werden mnss für $q = 0$. Die Anwendnng der in Art. 18 aufgestellten Formel auf unsern Fall zeigt, dass für jede kürzeste Linie

$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp$$

sein muss, falls $\theta$ der Winkel zwischen dem Element der Kürzesten nnd demjenigen Curvenelement ist, für welches $q$ constant ist: da nun die Abscissenaxe selbst eine Kürzeste nnd für dieselbe überall $\theta = 0$ ist, so erhellt, dass für $q = 0$ überall $\frac{\partial n}{\partial q} = 0$ werden muss. [138] Daraus schliessen wir, dass, wenn $n$ in eine nach Potenzen von $q$ fortschreitende Reihe entwickelt wird, diese die folgende Form haben mnss:

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \text{etc.},$$

wo $f$, $g$, $h$ etc. Fnnctionen von $p$ sind, und zwar setzen wir:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \text{etc.}, \\ g &= g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \text{etc.}, \\ h &= h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder

$$n = 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + f_2 p^2 q^2 + \text{etc.} \\ + g_0 q^3 + g_1 p q^3 + \text{etc.} \\ + h_0 q^4 + \text{etc.}$$

## 24.

Die Gleichungen des Artikels 22 geben in unserm Falle

$$n \sin\psi = \frac{\partial r}{\partial p},\; \cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q},\; -n\cos\psi = m\frac{\partial\varphi}{\partial p},\; \sin\psi = m\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

$$n^2 = n^2\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,\quad n^2\frac{\partial r}{\partial q}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, deren fünfte und sechste bereits in den andern enthalten sind, können Reihen für $r$, $\varphi$, $\psi$, $m$ oder für irgend welche Functionen dieser Grössen entwickelt werden; von diesen Reihen wollen wir diejenigen, die vor allem der Beachtung werth sind, hier aufstellen.

Da für unendlich kleine Werthe von $p$, $q$

$$r^2 = p^2 + q^2$$

werden muss, so wird die Reihe für $r^2$ mit dem Gliede $p^2 + q^2$ beginnen: die Glieder höherer Ordnung erhalten wir nach der Methode der unbestimmten Coefficienten*) mit Hülfe der Gleichung

$$\left(\frac{1}{n}\,\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 = 4\,r^2.$$

[**139**] So ergiebt sich

$$[1]\quad r^2 = p^2 + \tfrac{2}{3}f_0 p^2 q^2 + \tfrac{1}{2}f_1 p^3 q^2 + (\tfrac{2}{5}f_2 - \tfrac{4}{45}f_0^2)p^4 q^2 \\ + q^2 \qquad + \tfrac{1}{2}g_0 p^2 q^3 + \tfrac{2}{5}g_1 p^3 q^3 \\ + (\tfrac{2}{5}h_0 - \tfrac{7}{45}f_0^2)p^2 q^4 \\ + \text{etc.}$$

Aus der Formel

$$r \sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\partial(r^2)}{\partial p}$$

erhält man ferner

---

*) Die Rechnung, die durch einige Kunstgriffe etwas abgekürzt werden kann, hier auszuführen, haben wir für überflüssig gehalten.



$$[2]\quad r\sin\psi = p - \tfrac{1}{3}f_0pq^2 - \tfrac{1}{4}f_1p^2q^2 - (\tfrac{1}{5}f_2 + \tfrac{8}{45}f_0^2)\,p^3q^2$$
$$- \tfrac{1}{2}g_0pq^3 - \tfrac{2}{5}g_1p^2q^3$$
$$- (\tfrac{3}{5}h_0 - \tfrac{8}{45}f_0^2)\,pq^4$$
$$+ \text{etc.}$$

und aus $r\cos\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(r^2)}{\partial q}$

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f_0p^2q + \tfrac{1}{2}f_1p^3q + (\tfrac{2}{5}f_2 - \tfrac{4}{45}f_0^2)\,p^4q$$
$$+ \tfrac{3}{4}g_0p^2q^2 + \tfrac{3}{5}g_1p^3q^2$$
$$+ (\tfrac{4}{5}h_0 - \tfrac{14}{45}f_0^2)\,p^2q^3$$
$$+ \text{etc.}$$

Hiermit ist zugleich der Winkel $\psi$ bestimmt. Ebenso werden zur Berechnung des Winkels $\varphi$ am zweckmässigsten die Reihen für $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ entwickelt; dazu dienen die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial p} = n\cos\varphi\sin\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial q} = \cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial p} = n\sin\varphi\sin\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial q} = \sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sin\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0;$$

eine Combination derselben ergiebt:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial q} = r\cos\varphi,$$
$$[140]\quad \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial q} = r\sin\varphi.$$

Hieraus werden die Reihen für $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, deren erste Glieder offenbar $p$, $q$ sein müssen, hergeleitet, nämlich

$$[4]\quad r\cos\varphi = p + \tfrac{2}{3}f_0pq^2 + \tfrac{5}{12}f_1p^2q^2 + (\tfrac{3}{10}f_2 - \tfrac{8}{45}f_0^2)p^3q^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}g_0pq^3 + \tfrac{7}{20}g_1p^2q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h_0 - \tfrac{7}{45}f_0^2)pq^4$$
$$+ \text{etc.}$$

$$[5]\quad r\sin\varphi = q - \tfrac{1}{3}f_0p^2q - \tfrac{1}{6}f_1p^3q - (\tfrac{1}{10}f_2 - \tfrac{7}{90}f_0^2)p^4q - \tfrac{1}{4}g_0p^2q^2 - \tfrac{3}{20}g_1p^3q^2 - (\tfrac{1}{3}h_0 + \tfrac{13}{90}f_0^2)p^2q^3 + \text{etc.}$$

Aus den Gleichungen [2], [3], [4], [5] könnte man eine Reihe für $r^2\cos(\varphi+\psi)$ und daraus durch Division mit der Reihe [1] eine Reihe für $\cos(\psi+\varphi)$ ableiten, und von der letzteren könnte man zu einer Reihe für den Winkel $\psi+\varphi$ selbst gelangen. Eleganter erhält man jedoch diese Reihe auf folgende Weise: Differentiiren wir die erste und zweite von den Gleichungen, die am Anfang dieses Artikels aufgestellt sind, so erhalten wir

$$\sin\psi\cdot\frac{\partial n}{\partial q} + n\cos\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q} + \sin\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0;$$

verbinden wir damit die Gleichung

$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sin\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,$$

so entsteht

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial q} + \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial q} = 0.$$

Aus dieser Gleichung können wir mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten leicht die Reihe für $\psi+\varphi$ herleiten, wenn wir erwägen, dass das erste Glied derselben $\frac{1}{2}\pi$ sein muss, falls der Radius als Einheit genommen wird und $2\pi$ den Kreisumfang bezeichnet. Die genannte Reihe wird

$$[6]\quad \psi+\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - f_0pq - \tfrac{2}{3}f_1p^2q - (\tfrac{1}{2}f_2 - \tfrac{1}{6}f_0^2)p^3q - g_0pq^2 - \tfrac{3}{4}g_1p^2q^2 - (h_0 - \tfrac{1}{3}f_0^2)pq^3 - \text{etc.}$$

[**141**] Es ist der Mühe werth, auch den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ in eine Reihe zu entwickeln. Zu dieser Entwickelung führt folgende Bedingungsgleichung, die sich aus ziemlich nahe liegenden geometrischen Betrachtungen leicht ableiten lässt, und in der $S$ den gesuchten Flächeninhalt bezeichnet:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{r\sin\psi}{n}\int n\,dq,$$

wobei die Integration mit $q=0$ beginnt. Daraus erhält man nach der Methode der unbestimmten Coefficienten

[7]
$$\begin{aligned} S = \tfrac{1}{2}pq &- \tfrac{1}{12}f_0 p^3 q - \tfrac{1}{20}f_1 p^4 q - (\tfrac{1}{30}f_2 - \tfrac{1}{60}f_0^2) p^5 q \\ &- \tfrac{1}{12}f_0 p q^3 - \tfrac{3}{40}g_0 p^3 q^2 - \tfrac{1}{20}g_1 p^4 q^2 \\ &- \tfrac{7}{120}f_1 p^2 q^3 - (\tfrac{1}{15}h_0 + \tfrac{2}{45}f_2 + \tfrac{1}{60}f_0^2) p^3 q^3 \\ &- \tfrac{1}{10}g_0 p q^4 - \tfrac{3}{40}g_1 p^2 q^4 \\ &- (\tfrac{1}{10}h_0 - \tfrac{1}{30}f_0^2) p q^5 \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

## 25.

Von den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Artikels, die sich auf ein von kürzesten Linien gebildetes rechtwinkliges Dreieck beziehen, schreiten wir zu denen für Dreiecke im allgemeinen fort. Es sei $C$ ein anderer Punkt auf derselben kürzesten Linie $DB$, und für diesen mögen, während $p$ bleibt, die Buchstaben $q'$, $r'$, $\varphi'$, $\psi'$, $S'$ dasselbe bezeichnen, was $q$, $r$, $\varphi$, $\psi$, $S$ für den Punkt $B$ sind. So entsteht ein Dreieck mit den Ecken $A$, $B$, $C$, dessen Winkel mit $A$, $B$, $C$ bezeichnet werden mögen, während die gegenüberliegenden Seiten $a$, $b$, $c$ seien, der Flächeninhalt aber $\sigma$; das Krümmungsmaass in den Punkten $A$, $B$, $C$ soll resp. durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ausgedrückt werden. Wird noch (was stets zulässig ist) vorausgesetzt, dass die Grössen $p$, $q$, $q - q'$ positiv sind, so ist

$$A = \varphi - \varphi',\quad B = \psi,\quad C = \pi - \psi',$$
$$a = q - q',\quad b = r',\quad c = r,\quad \sigma = S - S'.$$

Vor allem soll der Flächeninhalt $\sigma$ durch eine Reihe dargestellt werden. Vertauscht man in [7] die einzelnen auf $B$ bezüglichen Grössen mit denen, die sich auf $C$ beziehen, so ergiebt sich eine Formel für $S'$, aus der man weiter, bis auf Grössen sechster Ordnung, [**142**]

$$\begin{aligned} \sigma = \tfrac{1}{2}p(q - q').\{1 &- \tfrac{1}{6}f_0(p^2 + q^2 + qq' + q'^2) \\ &- \tfrac{1}{60}f_1 p(6p^2 + 7q^2 + 7qq' + 7q'^2) \\ &- \tfrac{1}{20}g_0(q + q')(3p^2 + 4q^2 + 4q'^2)\} \end{aligned}$$

erhält. Diese Formel geht mit Hülfe der Reihe [2], die

$$c \sin B = p\{1 - \tfrac{1}{3}f_0 q^2 - \tfrac{1}{4}f_1 p q^2 - \tfrac{1}{2}g_0 q^3 - \cdots\}$$

ergiebt, in die folgende über:

$$\begin{aligned} \sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B.\{1 &- \tfrac{1}{6}f_0(p^2 - q^2 + qq' + q'^2) \\ &- \tfrac{1}{60}f_1 p(6p^2 - 8q^2 + 7qq' + 7q'^2) \\ &- \tfrac{1}{20}g_0(3p^2 q + 3p^2 q' - 6q^3 + 4q^2 q' \\ &\qquad + 4qq'^2 + 4q'^3)\}. \end{aligned}$$

Das Krümmungsmaass wird für jeden Punkt der Oberfläche (nach Art. 19, wo $m, p, q$ dieselbe Bedeutnng hatten, wie hier $n, q, p$)

$$= -\frac{1}{n}\frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hq^2 + \cdots\cdots}{1 + fq^2 + \cdots\cdots}$$
$$= -2f - 6gq - (12h - 2f^2)q^2 - \cdots\cdots$$

Daher wird, da $p$, $q$ sich auf den Punkt $B$ beziehen,

$$\beta = -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q - 2f_2 p^2 - 6g_1 pq$$
$$- (12h_0 - 2f_0^2)q^2 - \text{etc.},$$

ebenso

$$\gamma = -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q' - 2f_2 p^2 - 6g_1 p q'$$
$$- (12h_0 - 2f_0^2)q'^2 - \text{etc.},$$

$$\alpha = -2f_0.$$

Setzt man diese Krümmnngsmaasse in der Reihe für $\sigma$ ein, so erhält man folgenden Ausdruck, der bis auf Glieder sechster Ordnung (excl.) genau ist:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(4p^2 - 2q^2 + 3qq' + 3q'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3p^2 - 6q^2 + 6qq' + 3q'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(3p^2 - 2q^2 + qq' + 4q'^2)\}.$$

Die Genauigkeit bleibt dieselbe, wenn man für $p$, $q$, $q'$ setzt $c \sin B$, $c \cos B$, $c \cos B - a$; dadnrch wird [**143**]

$$[8]\quad \sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3a^2 + 4c^2 - 9ac\cos B)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3a^2 + 3c^2 - 12ac\cos B)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(4a^2 + 3c^2 - 9ac\cos B)\}.$$

Da aus dieser Gleichung alles verschwunden ist, was sich anf die Linie $AD$ bezieht, die senkrecht zn $BC$ gezogen war, so kann man noch die Pnnkte $A$, $B$, $C$ nnd alles, was sich darauf bezieht, mit cinander vertauschen; es wird daher mit derselben Genauigkeit

$$[9]\quad \sigma = \tfrac{1}{2}bc \sin A\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3b^2 + 3c^2 - 12bc\cos A)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3b^2 + 4c^2 - 9bc\cos A)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(4b^2 + 3c^2 - 9bc\cos A)\},$$

$$[10]\quad \sigma = \tfrac{1}{2}ab \sin C\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3a^2 + 4b^2 - 9ab\cos C)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(4a^2 + 3b^2 - 9ab\cos C)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(3a^2 + 3b^2 - 12ab\cos C)\}.$$

## 26.

Sehr nützlich ist die Vergleichung des betrachteten Dreiecks mit dem ebenen geradlinigen Dreieck, dessen Seiten gleich $a$, $b$, $c$ sind. Die Winkel dieses letzteren, die wir mit $A^*$, $B^*$, $C^*$ bezeichnen wollen, unterscheiden sich von den Winkeln des Dreiecks auf der Fläche, nämlich von $A$, $B$, $C$, um Grössen zweiter Ordnung; und es ist lohnend, diese Unterschiede genau zu ermitteln. Die Rechnungen aber, die mehr umfangreich, als schwierig sind, wird es genügen, hier in ihren Grundzügen anzuführen.

Vertauscht man in den Formeln [1], [4], [5] die Grössen, welche sich auf $B$ beziehen, mit den auf $C$ bezüglichen, so erhält man Formeln für $r'^2$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Dann ergiebt die Entwickelung des Ausdrucks

$$r^2+r'^2-(q-q')^2-2r\cos\varphi\,.\,r'\cos\varphi'-2r\sin\varphi\,.\,r'\sin\varphi',$$

welcher

$$= b^2+c^2-a^2-2bc\cos A = 2bc(\cos A^*-\cos A)$$

wird, in Verbindung mit der Entwickelung des Ausdrucks

$$r\sin\varphi\,.\,r'\cos\varphi'-r\cos\varphi\,.\,r'\sin\varphi',$$

welcher

$$= bc\sin A$$

wird, folgende Formel:

$$\begin{aligned}&\cos A^*-\cos A\\ &= -(q-q')p\sin A\{\tfrac{1}{3}f_0+\tfrac{1}{6}f_1p+\tfrac{1}{4}g_0(q+q')\\ &\qquad +(\tfrac{1}{10}f_2-\tfrac{1}{45}f_0^2)p^2+\tfrac{3}{20}g_1p(q+q')\\ &\qquad +(\tfrac{1}{5}h_0-\tfrac{7}{90}f_0^2)(q^2+qq'+q'^2)+\cdots\}.\end{aligned}$$

[**144**] Daher wird, bis auf Grössen fünfter Ordnung,

$$\begin{aligned}A^*-A = (q-q')p\{&\tfrac{1}{3}f_0+\tfrac{1}{6}f_1p+\tfrac{1}{4}g_0(q+q')+\tfrac{1}{10}f_2p^2\\ &+\tfrac{3}{20}g_1p(q+q')+\tfrac{1}{5}h_0(q^2+qq'+q'^2)\\ &-\tfrac{1}{90}f_0^2(7p^2+7q^2+12qq'+7q'^2)\}.\end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichung mit

$$2\sigma = ap\{1-\tfrac{1}{6}f_0(p^2+q^2+qq'+q'^2)-\cdots\}$$

und mit den im vorigen Artikel aufgestellten Werthen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so erhält man bis auf Grössen fünfter Ordnung

$$\begin{aligned}[11]\quad A^* = A-\sigma\{&\tfrac{1}{6}\alpha+\tfrac{1}{12}\beta+\tfrac{1}{12}\gamma+\tfrac{2}{15}f_2p^2\\ &+\tfrac{1}{5}g_1p(q+q')+\tfrac{1}{5}h_0(3q^2-2qq'+3q'^2)\\ &+\tfrac{1}{90}f_0^2(4p^2-11q^2+14qq'-11q'^2)\}.\end{aligned}$$

Ganz ähnliche Operationen führen zu folgenden Entwickelungen

$$[12]\quad B^* = B - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{10}f_2 p^2 + \tfrac{1}{10}g_1 p(2q+q') + \tfrac{1}{5}h_0(4q^2 - 4qq' + 3q'^2) - \tfrac{1}{90}f_0^2(2p^2 + 8q^2 - 8qq' + 11q'^2)\},$$

$$[13]\quad C^* = C - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{10}f_2 p^2 + \tfrac{1}{10}g_1 p(q+2q') + \tfrac{1}{5}h_0(3q^2 - 4qq' + 4q'^2) - \tfrac{1}{90}f_0^2(2p^2 + 11q^2 - 8qq' + 8q'^2)\}.$$

Hieraus folgt, da die Summe $A^* + B^* + C^*$ gleich zwei Rechten ist, zugleich der Ueberschuss der Summe $A + B + C$ über zwei Rechte, nämlich

$$[14]\quad A + B + C = \pi + \sigma\{\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}f_2 p^2 + \tfrac{1}{2}g_1 p(q+q') + (2h_0 - \tfrac{1}{3}f_0^2)(q^2 - qq' + q'^2)\}.$$

Diese letzte Gleichung hätte auch aus der Formel [6] hergeleitet werden können.

27.

Ist die betrachtete Fläche eine Kugel mit dem Radius $R$, so wird

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f_0 = \frac{1}{R^2};\ f_2 = 0,\ g_1 = 0,\ 6h_0 - f_0^2 = 0,$$

also

$$h_0 = \frac{1}{24R^4}.$$

Daher wird die Formel [14]

$$[\mathbf{145}]\quad A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{R^2},$$

und diese ist absolut genau. Die Formeln [11]—[13] ergeben aber

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(2p^2 - q^2 + 4qq' - q'^2),$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}(p^2 - 2q^2 + 2qq' + q'^2),$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}(p^2 + q^2 + 2qq' - 2q'^2)$$

oder ebenso genau

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(b^2 + c^2 - 2a^2),$$
$$B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + c^2 - 2b^2),$$
$$C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + b^2 - 2c^2).$$

Bei Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung folgt hieraus ein bekannter, zuerst von *Legendre* aufgestellter Satz.

28.

Unsere allgemeinen Formeln werden bei Weglassung der Glieder vierter Ordnung sehr einfache, nämlich

$$A^* = A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma),$$
$$B^* = B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma),$$
$$C^* = C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

An den Winkeln $A$, $B$, $C$ sind daher bei einer nicht kugelförmigen Fläche ungleiche Reductionen anzubringen, damit nach der Aenderung die Sinus den gegenüberliegenden Seiten proportional werden. Die Ungleichheit wird, allgemein zu reden, von der dritten Ordnung sein, indessen kann dieselbe, falls die Oberfläche nur wenig von einer Kugel abweicht, eine höhere Ordnung erreichen: selbst bei den grössten Dreiecken auf der Erdoberfläche, [146] deren Winkel man noch messen kann, kann die Differenz stets als unmerklich betrachtet werden. So hat z. B. bei dem grössten unter den Dreiecken, die wir in den letzten Jahren gemessen haben, nämlich dem zwischen den Punkten Hohehagen, Brocken, Inselsberg, für welches der Ueberschuss der Winkelsumme = 14",85348 war, die Rechnung folgende Reductionen für die einzelnen Winkel geliefert:

Hohehagen 4",95113,
Brocken 4",95104,
Inselsberg 4",95131.

29.

Zum Schluss wollen wir noch den Flächeninhalt eines auf einer krummen Fläche gelegenen Dreiecks mit dem Flächeninhalt des geradlinigen Dreiecks vergleichen, dessen Seiten

$a$, $b$, $c$ sind. Den letzteren Flächeninhalt wollen wir mit $\sigma^*$ bezeichnen. Derselbe ist

$$\sigma^* = \tfrac{1}{2} bc \sin A^* = \tfrac{1}{2} ac \sin B^* = \tfrac{1}{2} ab \sin C^*.$$

Wir haben bis auf Grössen vierter Ordnung:

$$\sin A^* = \sin A - \tfrac{1}{12} \sigma \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma)$$

oder mit gleicher Genauigkeit

$$\sin A = \sin A^* \{1 + \tfrac{1}{24} bc \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma)\}.$$

Substituirt man diesen Werth in Formel [9], so wird bis auf Grössen sechster Ordnung:

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2} bc \sin A^* \,.\, \{1 &+ \tfrac{1}{120} \alpha (3b^2 + 3c^2 - 2bc \cos A) \\ &+ \tfrac{1}{120} \beta (3b^2 + 4c^2 - 4bc \cos A) \\ &+ \tfrac{1}{120} \gamma (4b^2 + 3c^2 - 4bc \cos A)\}\end{aligned}$$

oder ebenso genau

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma^* \{1 &+ \tfrac{1}{120} \alpha (a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \tfrac{1}{120} \beta (2a^2 + b^2 + 2c^2) \\ &+ \tfrac{1}{120} \gamma (2a^2 + 2b^2 + c^2)\}.\end{aligned}$$

Für eine Kugelfläche nimmt diese Formel folgende Gestalt an:

$$\sigma = \sigma^* \{1 + \tfrac{1}{24} \alpha (a^2 + b^2 + c^2)\};$$

statt dieser Formel kann auch, wie leicht zu beweisen ist, mit derselben Genauigkeit folgende genommen werden:

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*}}.$$

Wird diese Formel auf Dreiecke angewandt, die auf einer nicht kugelförmigen krummen Fläche liegen, so wird der Fehler, allgemein zu reden, von der fünften Ordnung, doch unmerklich bei allen Dreiecken, wie sie auf der Erdoberfläche gemessen werden können.

---

# Anmerkungen.

Die Bedeutung der vorstehenden Abhandlung von *Gauss* beruht theils in der Eröffnung neuer Gesichtspunkte für die Behandlung der Lehre von den krummen Flächen, theils in der Ableitung neuer wichtiger Resultate. In ersterer Beziehung ist vor allem die Aufstellung der Begriffe des Krümmungsmaasses und der Gesammtkrümmung (Art. 6) hervorzuheben, sowie die Scheidung der Eigenschaften einer Fläche in solche, die eine bestimmte Form der Fläche im Raume voraussetzen, nnd solche, die bei einer Verbiegung ungeändert bleiben (Art. 13). Hinsichtlich der Methode ferner ist wichtig die Benutzung der Darstellung einer beliebigen Fläche durch zwei Hülfsvariable. Diese Darstellung bildet die Quelle einer grossen Zahl von neuen Sätzen, von denen besonders erwähnenswerth sind: der Nachweis, dass das Krümmungsmaass bei der Verbiegung einer Fläche ungeändert bleibt (Art. 11, 12), die Sätze der Art. 15 und 16 über geodätische Linien, der Satz des Art. 20, endlich die am Schluss abgeleiteten Resultate, welche die Beziehung der von geodätischen Linien gebildeten Dreiecke zu geradlinigen Dreiecken mit gleich langen Seiten betreffen.

Veröffentlicht wurden die Disquisitiones generales circa superficies curvas zuerst in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores Vol. VI (ad a. 1823—1827), Gottingae 1828; Commentationes classis mathematicae p. 99 bis 146. Dies Original, dessen Seitenzahlen dem Text beigefügt sind, ist der vorstehenden Uebersetzung des Herausgebers zu Grunde gelegt. Später wurde die Arbeit wieder abgedruckt im Anhange zu der von *Liouville* herausgegebenen fünften Auflage von *Monge's*: »Application de l'analyse à la géométrie« (Paris 1850), ferner im Band IV der *Gauss*'schen Werke (Göttingen 1873). Eine französische Uebersetzung findet sich in den Nouvelles Annales de Mathémat. T. XI, eine deutsche, vom Herausgeber jedoch an keiner Stelle benutzte, in der »Analytischen Geometrie des Raumes« von *Böklen* (2. Aufl., Stuttgart 1884).

Von *Gauss* selbst ist eine Anzeige seiner Arbeit in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 5. November 1827 veröffentlicht.

Art. 1. Die Einführung der Hülfskugel kommt, wie *Gauss* in der eben erwähnten Anzeige bemerkt, im Grunde auf das Verfahren hinaus, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingirte Himmelskugel von unendlich grossem Halbmesser bezieht.

Art. 2. Der Ausdruck »Stellung einer Ebene« ist von *Staudt* (Geometrie der Lage Nr. 40) eingeführt.

Neu ist von den Resultaten dieses Artikels der Satz VI, eigenartig die Ableitung der Resultate von VII.

Art. 4. Die zweite Methode der Darstellung einer Fläche (Ausdruck der Coordinaten durch zwei Hülfsveränderliche) ist für beliebige Flächen zuerst von *Gauss* bei der Aufgabe der conformen Abbildung benutzt [Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von *H. C. Schumacher*, drittes Heft, Altona 1825; *Gauss*' Werke IV p. 189. — Vergl. auch *Gauss* »Theoria attractionis corporum sphaer. ellipt.«, Comment. Gott. II, 1813; *Gauss*' Werke Bd. V p. 10]. Hier wird diese Darstellnng zum ersten Male zur Bestimmung der Richtung der Flächennormale verwandt, weiterhin auch in der Lehre von der Krümmung und von den geodätischen Linien. Die geometrische Bedeutung der Variabeln $p$, $q$ wird in Art. 17 ausführlicher erörtert.

Als eine Erweiterung dieser Darstellung kann man die Bestimmung der Punkte des Raumes durch krummlinige Coordinaten ansehen.

Art. 5. Zur Entscheidung der Frage, welches der beiden in Art. 4 für $X$, $Y$, $Z$ gefundenen Werthsysteme der nach aussen, welches der nach innen gerichteten Normale zugehört, bedarf es der Anwendung des Satzes Art. 2 (VII) nur, falls man die zweite Methode der Darstellung einer Fläche benutzt. Ist dagegen die Fläche durch eine Gleichung $W = 0$ zwischen den Coordinaten gegeben, so führt folgende einfachere Ueberlegung zum Ziele. Vom Punkte $A$ ziehe man die Linie $d\sigma$ nach der äusseren Seite, so ist, wenn $dx$, $dy$, $dz$ die Projectionen von $d\sigma$ sind,

$$Pdx + Qdy + Rdz > 0.$$

Andererseits ist der Winkel zwischen $\sigma$ und der äusseren Normale ein spitzer, also

$$\frac{dx}{d\sigma} X + \frac{dy}{d\sigma} Y + \frac{dz}{d\sigma} Z > 0.$$

Diese Bedingung ist, da $d\sigma$ positiv ist, mit der vorhergehenden nur zu vereinigen, wenn für $X$, $Y$, $Z$ die erste Lösung genommen wird. — Auf ähnliche Weise ergiebt sich das Resnltat, wenn die Fläche nach der dritten Methode analytisch ausgedrückt ist.

Art. 6. Die Einführung der Begriffe Gesammtkrümmung und Krümmungsmaass motivirt *Gauss* in der Anzeige seiner Arbeit folgendermaassen: »Je geringer die Abweichung eines Stückes einer krummen Fläche von der Ebene ist, desto kleiner wird der entsprechende Theil der Kugelfläche sein, nnd es ist mithin ein sehr natürlicher Gedanke, zum Maassstabe der Totalkrümmung, welche einem Stück einer krummen Fläche beizulegen ist, den Inhalt des entsprechenden Stücks der Kugelfläche zu gebrauchen. Ausser der Grösse kommt aber zugleich noch die Lage der Theile in Betracht, die, ganz abgesehen von dem Grössenverhältniss, in den beiden Stücken entweder eine ähnliche, oder eine verkehrte sein kann: diese beiden Fälle werden durch das der Totalkrümmung vorzusetzende positive oder negative Zeichen unterschieden werden können.« Weiterhin heisst es dann: »Die Vergleichung des Inhalts zweier einander correspondirender Stücke der krummen Fläche und der Oberfläche der Hülfskugel führt nun (auf dieselbe Art, wie z. B. aus der Vergleichung von Volumen und Masse der Begriff von Dichtigkeit hervorgeht) zu einem neuen Begriffe«, dem des Krümmungsmaasses. Durch Einführung dieses Begriffes ist zuerst der bis dahin ganz vage Ansdrnck Flächenkrümmung präcis definirt, und zwar vollkommen analog dem Begriff der Krümmung einer Curve [vergl. *Bertrand* »Traité de calcul différentiel § 720]. Den Ausdruck »Krümmung einer Cnrve« hält *Gauss* zwar nicht für angemessen (daranf bezieht sich die Bemerkung p. 12 Z. 2—3), derselbe hat sich aber doch so eingebürgert, dass er zweckmässiger Weise beibehalten werden muss.

Die in Rede stehende Definition des Krümmungsmaasses, deren Aufstellung zn den werthvollsten wissenschaftlichen Leistungen von *Gauss* gehört, ist allseitig acceptirt, während eine abweichende, von *Sophie Germain* vorgeschlagene Definition [*Crelle* Journ. Bd. VII], die als Maass der Flächenkrümmung in einem Punkte das arithmetische Mittel der reciproken Hauptkrümmungsradien (die sogenannte mittlere Krümmung) ergiebt, verworfen ist. In neuester Zeit hat *Casorati* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXII, Fasc. VIII, 1889] die *Gauss*'sche Definition der Flächenkrümmung durch eine andere

zu ersetzen gesucht, die darauf führt, die Krümmung dnrch die halbe Snmme der reciproken Qnadrate der Hauptkrümmungsradien zu messen. Dass diese neue Definition allseitige Zustimmung finden wird, möchte der Herausgeber bezweifeln.

Seit etwa zwei Jahrzehnten hat man den Begriff des Krümmungsmaasses auch anf drei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten ausgedehnt. Doch sind hier verschiedene Erweiterungen möglich. Die wichtigsten derselben sind die von *Riemann* [»Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, Götting. Abhandl. XIII, 1868; *Riemann*'s Werke, herausgegeben von *H. Weber*, Göttingen 1876, p. 254], ferner die von *Kronecker* [»Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln«, Monatsber. der Berl. Akad. 1869], die auch von *Lipschitz* (*Borchardt* Journ. Bd. 71 und Bd. 81) adoptirt ist. Man vergleiche auch das Buch von *Killing* »Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung«, Leipzig 1885.

Die am Schluss von p. 13 in Aussicht gestellte Erörterung über die allgemeinste Auffassung von Figuren hat *Gauss* nicht veröffentlicht.

Art. 7. Dass die Betrachtung eines Oberflächenelements, welches die Gestalt eines Dreiecks hat, zur Berechnung des Krümmungsmaasses genügt, ergiebt sich daraus, dass das Verhältniss einer unendlich kleinen Figur auf der Fläche zu ihrer Projection von der Gestalt der Figur nnabhängig ist.

Art. 8. Die Arbeit von *Euler*, in der die unter I—IV mitgetheilten Resultate zuerst abgeleitet sind, steht in den Mém. de l'Acad. de Berlin, T. XVI, 1760. Auf die Krümmung schiefer Schnitte, die von *Meunier* erledigt ist [Mém. de Math. de l'Acad. des sciences, T. X. Paris 1785], ist *Gauss* nicht eingegangen.

Die hier abgeleiteten Resultate erfordern übrigens eine Modification, wenn die Tangentialebene eine Berührung höherer Ordnung mit der Fläche eingeht (vergl. *Plücker*, *Crelle* J. Bd. III). — Die Krümmung in singulären Pnnkten einer Fläche ist neuerdings von *de Salvert* behandelt (Annales de la société scientif. de Bruxelles VII, 1882).

Dem Lehrsatze V dieses Artikels hat *R. Sturm* (Mathemat. Annal. XXI p. 379, 1883) das folgende Analogon an die Seite gestellt: »Beschreibt man um einen Flächenpunkt $P$ eine Kugel mit unendlich kleinem Radius und bildet die dadurch in die Fläche eingeschnittene Curve mittels paralleler Normalen auf der Hülfskugel ab, so ist der Grenzwerth des Verhältnisses der

Umfänge beider Curven die mittlere Flächenkrümmung im Punkte $P$.«

Art. 10, 11. Die Grössen $E$, $F$, $G$ pflegt man als Fundamentalgrössen erster, die Grössen $D$, $D'$, $D''$ als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zu bezeichnen. An Stelle der letzteren sind von *Hoppe* (»Principien der Flächentheorie«, *Grunert* Archiv Bd. 59; auch als besondere Schrift erschienen, Leipzig 1876) andre Grössen eingeführt, die in der Bezeichnung von *Gauss*

$$\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}$$

lauten würden; die *Hoppe*'schen Fundamentalgrössen sind auch von *Knoblauch* (»Einleitung in die allgemeine Theorie der Flächen«, Leipzig 1888) adoptirt. Noch andere Fundamentalgrössen haben *Bour* und *Lipschitz* in ihren bei Art. 12 zu erwähnenden Arbeiten benutzt. Manche Fragen erfordern die Einführung von Fundamentalgrössen dritter Ordnung, so z. B. die Bestimmung desjenigen Normalschnitts, welcher von dem zugehörigen Krümmungskreis in der dritten Ordnung berührt wird.

Eine directe Herleitung des in Art. 10 gefundenen Ausdrucks für $k$, welche die Betrachtungen des Art. 7 nicht voraussetzt, findet man bei *Hoppe* (§ 11 der erwähnten Schrift) und bei *Escherich* (*Grunert* Arch. Bd. 57).

Unter Zugrundelegung von speciellen Variabeln lässt sich, wie *Liouville* (Journ. d. Mathém. XII und Anhang zu der schon erwähnten Ausgabe von *Monge*) gezeigt hat, dem Resultat des Artikels 11 eine einfachere Form geben. Noch eine andere Gestalt hat die in Rede stehende Formel bei *Weingarten* (cf. Anmerkung zu Art. 12).

Art. 12. Den wichtigen Satz des Art. 12 haben *Bertrand* und *Puiseux* (*Liouville* J. XIII, cf. auch Anhang zu *Liouville*'s Ausgabe von *Monge*, Note IV) durch Berechnung des Umfangs einer geodätischen Kreisfläche von sehr kleinem Radius abgeleitet; *Diguet* hat dann den Beweis durch Ermittelung des Flächeninhalts einer solchen Fläche vervollständigt. Andere Beweise rühren von *Beltrami* (Atti d. Ateneo Veneto V, 1869) und *Chelini* (Mem. di Bologna (2) VIII, 1868) her.

Ein instructives Beispiel zweier auf einander abwickelbarer Flächen bilden das Catenoid und die windschiefe Schraubenfläche. Von anderen Beispielen sind besonders erwähnenswerth die Flächen constanten Krümmungsmaasses. Dieselben sind nament-

lich studirt von *Beltrami* [*Brioschi* Annali di Matem. (1) VII, (2) II; *Battaglini* Giornale VI], *Schläfli* [*Brioschi* Ann. (1) V], *Dini* [*Battaglini* Giorn. V], *Enneper* [Göttinger Nachr. 1868, 1876], *Lie* [Arch. for Math. og Nat. IV, V, Christiania 1879, 1880], *Weingarten* [*Kronecker* Journ. Bd. 94, 95], *Bianchi* [Math. Ann. XVI, *Battaglini* Giorn. XX].

Die Flächen constanter Krümmung spielen insofern eine besondere Rolle, als für sie auch die Umkehrung des *Gauss*'schen Satzes gilt; d. h. wenn zwei Flächen in allen Punkten gleiches constantes Krümmungsmaass haben, sind sie auf einander abwickelbar, während bei zwei Flächen mit variabelem Krümmungsmaass die Gleichheit des Krümmungsmaasses in entsprechenden Punkten noch nicht zur Abwickelung genügt. [Vergl. *Minding*, *Crelle* Journ. Bd. 19].

Hinsichtlich der sehr reichhaltigen Litteratur, die im Anschluss an *Gauss* die Abwickelbarkeit von Flächen auf einander weiter untersucht hat, müssen wir uns hier mit einem kurzen Hinweis auf die wichtigsten Arbeiten begnügen, da ein näheres Eingehen auf den Inhalt zu weit führen würde. Folgende Autoren sind vorzugsweise zu nennen: *Bour* [Journ. de l'école polytechn. Bd. 22 (Cah. 39) 1862], *Bonnet* [Journ. de l'école polyt. Bd. 24, 25 (Cah. 41, 42) 1865, 1867; *Liouville* Journ. XVI], *Aoust* [Comptes rend. 1850, 1862, 1863, 1868; *Borchardt* Journ. Bd. 58], *Beltrami* [*Battaglini* Giorn. Bd. II, III, Memor. d. Bologna (2) VIII, Mathemat. Ann. I], *Dini* [*Brioschi* Annali di Mat. (2) IV], *Enneper* [Götting. Nachr. 1874, 1875], *Lipschitz* [Ber. d. Berl. Akad. 1882, 1883], *Weingarten* [*Borchardt* Journ. Bd. 59; Festschrift der technischen Hochschule zu Berlin 1884; *Kronecker* Journ. Bd. 100, Ber. d. Berl. Akad. 1886].

Art. 13. Das Versprechen, andere Eigenschaften auf einander abwickelbarer Flächen später zu behandeln, hat *Gauss* nicht erfüllt. Dagegen hat *Minding* gezeigt, dass bei Verbiegung einer Fläche die sogenannte geodätische Krümmung, d. i. der Grenzwerth für das Verhältniss eines Bogenelements zu dem Winkel zwischen zwei auf einander folgenden geodätischen Tangenten, ungeändert bleibt [*Crelle* Journ. Bd. VI].

Art. 14. Die hier abgeleitete Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie, die darin besteht, dass ihre Hauptnormale überall mit der Flächennormale zusammenfällt, ist zuerst von *Euler* gefunden [»Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes« etc., Lausannae 1744].

*Gauss* unterscheidet hier nicht zwischen eigentlichen kürzesten und geodätischen Linien. Darauf, dass diese Unterscheidung nöthig ist, hat vor allem *Jacobi* hingewiesen [*Crelle* Journ. Bd. XVII, Gesammelte Werke Band IV, p. 49, 50; Vorlesungen über Dynamik p. 46, 47]. In neuerer Zeit ist die Frage, wann eine geodätische Linie aufhört, kürzeste Entfernung zwischen zweien ihrer Punkte zu sein, ausführlicher erörtert von *Braunmühl* (Math. Annal. Bd. XIV) und *Mangoldt* (*Kronecker* Journ. Bd. 91).

Art. 15, 16. Die beiden hier aufgestellten Sätze rühren, wie schon oben bemerkt, von *Gauss* her.

Art. 17. Die Darstellung einer Fläche mittelst der Parameter zweier Curvenschaaren, die auf ihr liegen, hat sich seit *Gauss* allgemein eingebürgert und wird gegenwärtig als die grundlegende angesehen. Von speciellen Curven auf Flächen sind zu erwähnen die Krümmungscurven, die asymptotischen Linien auf den Flächen mit negativem Krümmungsmaass, die isometrischen Curven, d. h. die, welche eine Fläche in unendlich kleine Quadrate theilen, endlich die weiterhin im Art. 19 besprochenen Curvensysteme.

Art. 18. *Gauss* begnügt sich hier damit, die Differentialgleichungen aufzustellen, von denen die Bestimmung der geodätischen Linie einer Fläche abhängt, ohne diese Bestimmung für specielle Flächen wirklich durchzuführen. Das wichtigste Beispiel einer derartigen, allerdings nach einer ganz andern Methode durchgeführten Bestimmung ist die Ermittelung der geodätischen Linie des dreiaxigen Ellipsoids von *Jacobi* [*Crelle* Journ. XIX; Gesammelte Werke Band II p. 59; Vorlesungen über Dynamik, Vorl. 28]. Eine andere diesen Gegenstand betreffende Untersuchung rührt von *Liouville* her [Zusätze zu *Monge*, Note III], der zeigte, dass man für eine grosse Klasse von Flächen die geodätischen Linien durch Quadraturen finden kann.

In analoger Art wie die geodätischen Linien lassen sich nach *Darboux* [C. R. Bd. 96, 1883] die Curven constanter geodätischer Krümmnng behandeln.

Art. 19. Die hier auftretenden Variabeln pflegt man als geodätische Polarcoordinaten, die Cnrven, welche auf den von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien senkrecht stehen, als geodätische Kreise zu bezeichnen. Analog werden die aus dem Satze in Art. 16 entspringenden Variabeln, falls die Grund-

curve eine geodätische Linie ist, geodätische Parallelcoordinaten genannt.

Art. 20. Diesen wichtigen Satz hat *Jacobi* [*Crelle* Journ. XVI p. 344] folgendermaassen verallgemeinert: Ein Dreieck werde von drei beliebigen Raumcurven begrenzt, die nur der Beschränkung unterworfen sind, dass je zwei der Curven in ihren Schnittpunkten dieselbe Hauptnormale haben. Zieht man dann durch den Mittelpunkt der Hülfskugel zu allen Hauptnormalen des Umfangs des Dreiecks parallele Radien, so schneiden diese auf der Kugelfläche ein zweites Dreieck ab, dessen Inhalt gleich dem Ueberschuss der Winkelsumme des gegebenen Dreiecks über $\pi$ oder gleich dem Fehlbetrag jener Summe an $\pi$ ist.

Art. 21. Die vorletzte Formel dieses Art. (S. 40 Z. 1) hat bei *Gauss* sowie im *Liouville*'schen Abdruck falsches Vorzeichen.

Art. 23. Die Formel für $d\theta$ (Mitte von S. 42) hat im Original sowie in *Gauss*' Werken Bd. IV falsches Vorzeichen.

Art. 24. Um die Art der Rechnung, die zur angenäherten Lösung der in den vorhergehenden Artikeln aufgestellten Differentialgleichungen führt, zu kennzeichnen, möge hier die vollständige Ableitung der Formel [1] Platz finden, jedoch mit Beschränkung auf die Glieder fünfter Ordnung. Man setze

$$r^2 = p^2 + q^2 + R_3 + R_4 + R_5,$$

wobei der Index von $R$ die Ordnung des betreffenden Gliedes in Bezug auf $p$ und $q$ bezeichnet. Dann wird, falls man die die fünfte Ordnung übersteigenden Glieder fortlässt,

$$\text{a)}\quad \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 - 4r^2 = 4\left[p\frac{\partial R_3}{\partial p} + q\frac{\partial R_3}{\partial q} - R_3\right]$$
$$+ 4\left[p\frac{\partial R_4}{\partial p} + q\frac{\partial R_4}{\partial q} - R_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial q}\right)^2\right]$$
$$+ 4\left[p\frac{\partial R_5}{\partial p} + q\frac{\partial R_5}{\partial q} - R_5 + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial p}\frac{\partial R_4}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial q}\frac{\partial R_4}{\partial q}\right]$$
$$= 8R_3 + 4\left[3R_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial q}\right)^2\right]$$
$$+ 4\left[4R_5 + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial p}\frac{\partial R_4}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial q}\frac{\partial R_4}{\partial q}\right],$$

da nach einem bekannten Satze

$$p\frac{\partial R_3}{\partial p} + q\frac{\partial R_3}{\partial q} = 3R_3 \text{ etc.}$$

ist. Ferner ist mit Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung

$$1 - \frac{1}{n^2} = 2f_0 q^2 + 2f_1 pq^2 + 2g_0 q^3,$$

also wird

b) $$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2$$

$$= 8f_0 p^2q^2 + 8f_1 p^3q^2 + 8g_0 p^2q^3 + 8f_0 pq^2 \frac{\partial R_3}{\partial p},$$

welche Gleichung, ebenso wie a), bis auf Glieder sechster Ordnung genau ist. Die Differentialgleichung für $r$ aber lässt sich schreiben

$$\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 - 4r^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2.$$

In den Ausdrücken a) und b) müssen daher die Glieder gleicher Ordnung übereinstimmen. Das giebt, da b) ein Glied dritter Ordnung nicht enthält,

$$R_3 = 0,$$

ferner

$$12 R_4 = 8f_0 p^2q^2, \quad 16 R_5 = 8f_1 p^3q^2 + 8g_0 p^2q^3,$$

womit die Formel [1] bewiesen ist. Analog würde sich auch das Glied sechster Ordnung ergeben.

Art. 24, Formel [6]. Dass das erste Glied rechts $= \frac{1}{2}\pi$ ist, folgt so: Nach S. 38 ist $N - M = \omega$, $N - M' = \psi$, also $M' - M = \omega - \psi$. Andrerseits ist (für unendlich kleine Werthe von $r$) $M' - M = \varphi$ und $\omega$ ist $= \frac{1}{2}\pi$, folglich $\varphi + \psi = \frac{1}{2}\pi$.

Art. 24, Formel [7]. Die Differentialgleichung, aus der [7] folgt, lässt sich folgendermaassen ableiten. Man verlängere $AB$ um $BB' = dp$, ziehe durch $B'$ die zu $AB'$ senkrechte geodätische Linie, welche $AD$ in $D'$ treffe. Endlich mache man $B'D'' = BD$, so dass $DD''$ auf $B'D'$ senkrecht steht. Dann ist, wenn unter $ABD$ die Fläche des Dreiecks $ABD$ verstanden wird,

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \lim \frac{AB'D' - ABD}{DD'} = \lim \frac{BDD'B'}{DD'}$$

$$= \lim \frac{BDD''B'}{BB'} \cdot \lim \frac{BB'}{DD'},$$

da die Fläche $BDD''B'$ sich von $BDD'B'$ nur um unendlich Kleines zweiter Ordnung unterscheidet. Es ist aber

$$BDD''B' = dp \cdot \int ndq, \quad \text{also} \lim \frac{BDD''B'}{BB'} = \int ndq,$$

ferner

$$\lim \frac{BB'}{DD'} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

mithin

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \int ndq,$$

also auch

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r}\int ndq.$$

Endlich folgt aus den im Anfang des Art. 24 angegebenen Werthen von $\frac{\partial r}{\partial p}$ etc.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{n}\sin\psi, \quad \frac{\partial q}{\partial r} = \cos\psi,$$

so dass schliesslich

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\sin\psi}{n} + \frac{\partial S}{\partial q}\cos\psi = \frac{\sin\psi}{n}\int ndq$$

wird, q. e. d.

Art. 25, 26. In diesen Artikeln sind bei *Gauss* mehrere Zwischenformeln fehlerhaft, vermuthlich in Folge von Druckfehlern. Die betreffenden Fehler sind auch in *Liouville*'s Anhang zu *Monge*, sowie in *Gauss*' Werke Band IV übergegangen. Es sind folgende: In der ersten Formel für $\sigma$ [S. 46 Z. 10—8 von unten] heisst bei *Gauss* die letzte Klammer

$$3p^2 + 4q^2 + 4qq' + 4q'^2.$$

Hier ist das Glied $4qq'$ zu tilgen.

In der Formel S. 47 Z. 16—18 steht zum Schluss $4qq'$, während es $4q'^2$ heissen muss (bei *Liouville* verbessert).

Die Formel S. 48 Z. 8—10 von unten hat bei *Gauss* falsches Vorzeichen. Statt

$$A^* - A = -(q-q')\,p\cdot\{\ldots\}$$

muss es heissen

$$A^* - A = (q-q')\,p\cdot\{\ldots\}.$$

Art. 27. Dass $f_0 = -\frac{1}{2R^2}$, $f_2 = 0$ etc., ergiebt sich auch noch folgendermaassen: Für die Kugel ist

$$ds^2 = \cos^2\left(\frac{q}{R}\right) \cdot dp^2 + dq^2,$$

also

$$n = \cos\left(\frac{q}{R}\right) = 1 - \frac{q^2}{2R^2} + \frac{q^4}{24R^2} - \cdots,$$

d. h.

$$f_0 = -\frac{1}{2R^2}, \quad h_0 = \frac{1}{24R^4}, \quad f_1 = g_0 = f_2 = g_1 = 0.$$

Der Satz von *Legendre* findet sich in den Mém. de Paris 1787 p. 338 und Trigonom. Append. V.

Art. 28. Der Hohehagen ist ein Berg zwischen Göttingen und Hannöversch-Münden. — Die Seiten des in Rede stehenden Dreiecks sind ungefähr 69, 85, 107 Kilometer lang.

Art. 29. Ableitung der letzten Formel. Nach den vorhergehenden Formeln ist für $\alpha = \beta = \gamma$

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{\alpha}{12} \cdot 2bc\cos A = 1 + \frac{\alpha}{12}(b^2 + c^2 - a^2),$$

daher bei Vernachlässigung von $\alpha^2$

$$\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*} = 1 + \frac{\alpha}{12}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*}} = 1 + \frac{\alpha}{24}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Die die Vergleichung kleiner geodätischer Dreiecke mit geradlinigen Dreiecken von gleicher Seitenlänge betreffenden Entwickelungen sind durch Berechnung der Glieder nächster Ordnung weiter geführt von *Hansen* (geodätische Untersuchungen, 1865), *Schering* (Götting. Nachr. 1867), *Weingarten* (Astronomische Nachr. Bd. 73, 1869). Ferner ist die allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke weiter ausgebildet durch *Christoffel* [Abhandl. d. Berl. Akad. 1868], *Weingarten* [Ber. d. Berliner Akad. 1882], *Brill* [Münch. Abhandl. 1883], *Mangoldt* [*Kronecker* Journ. Bd. 94, 1883].

Halle a. S., den 11. Juni 1889.

**A. Wangerin.**

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.








